Στόχος της αναγνώρισης προτύπων

ομαδοποίηση προτύπων
με κοινά χαρακτηριστικά

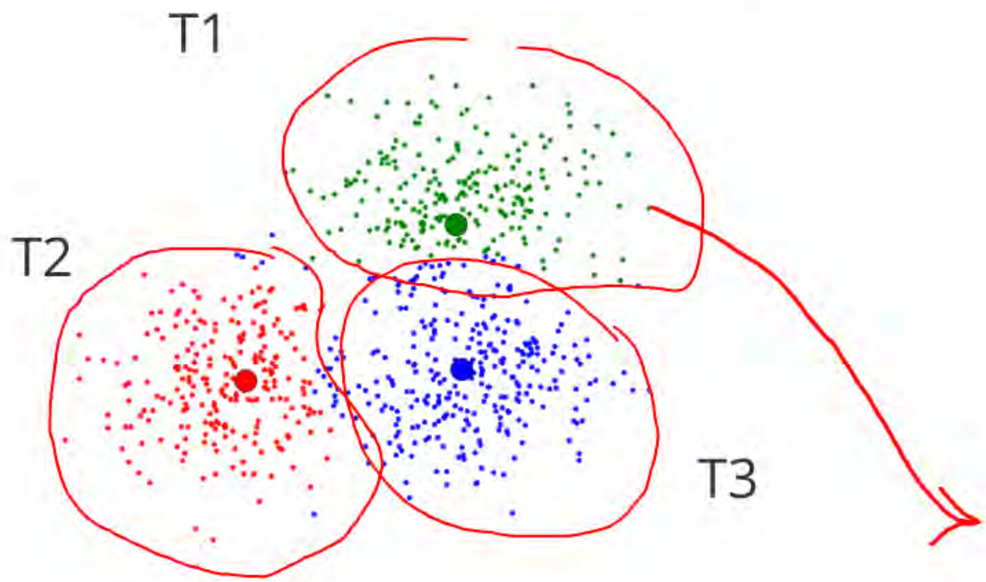
μετά από εντοπισμό συγκεντρώσεων προτύπων που δημιουργούνται στο χώρο των προτύπων

Συγκέντρωση μετρήσεων
Εξαγωγή χαρακτηριστικών
Feature extraction/selection

→

Εύρεση συγκεντρώσεων στο χώρο των προτύπων
Ομαδοποίηση και ονομασί
Clustering & Labeling

Στη γενική περίπτωση



Για Τ κλάσεις/τάξεις
με Κ πρότυπα
και Ν χαρακτηριστικά

$\vec{X}=(x1, x2, ..., xN)$

Κάθε Πρότυπο χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα Ν διαστάσεων
και μπορεί να αναπαρίσταται από ένα πίνακα-στήλη Nx1

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xN \end{bmatrix}$$

Κάθε χαρακτηριστικό (ν) ενός προτύπου (κ) μιας κλάσης (τ) συμβολίζεται:

$$x^{\tau}_{\nu\kappa}$$

Ορισμοί στους πίνακες

Ανάστροφος πίνακας

$$A^T_{i,j} = A_{j,i}$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Ορισμοί στους πίνακες

Πολλαπλασιασμός πινάκων $\left[\Gamma_{\nu x \mu} = \sum_{\kappa=1}^{K} A_{\nu x \kappa} \; B_{\kappa x \mu} \right]$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1x2 + 2x3 + 3x1 & 1x1 + 2x2 + 3x2 \\ 2x2 + 1x3 + 3x1 & 2x1 + 1x2 + 3x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Ευκλείδια απόσταση με πίνακες

Με βάση τον ορισμό του προλλαπλασιασμού πινάκων

Για δύο διανύσματα, η ευκλείδεια απόσταση ορίζεται

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N} (x_\nu - y_\nu)^2\right]^{1/2}$$

Αναπτύσσοντας το άθροισμα έχουμε:

$$d(x,y) = \left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_N-y_N)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \left[(x_1-y_1)(x_1-y_1) + (x_2-y_2)(x_2-y_2) + \ldots + (x_N-y_N)(x_N-y_N)\right]^{1/2} =$$

$$= \left[(x-y)^T (x-y)\right]^{1/2}$$

Ευκλείδεια απόσταση με πίνακες

Έστω $\left[\ \vec{x}=(x_1, x_2) \quad \text{και} \quad \vec{y}=(y_1, y_2)\ \right]$

σε χώρο δύο διαστάσεων, N=2

$$d(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left[(x_1-y_1)(x_1-y_1)+(x_2-y_2)(x_2-y_2)\right]^{1/2}$$

Εάν $\vec{z}=\vec{x}-\vec{y}=\begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}$

τότε $\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}$

$$= (x_1 - y_1)(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)(x_2 - y_2)$$

$$= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

$$d(x,y)=\left[\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}\right]^{1/2} = \left[(x-y)^T(x-y)\right]^{1/2}$$

Εσωτερικό γινόμενο

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$ που περιγράφουν αντίστοιχα δύο πρότυπα Π_x, Π_y ορίζεται ως:

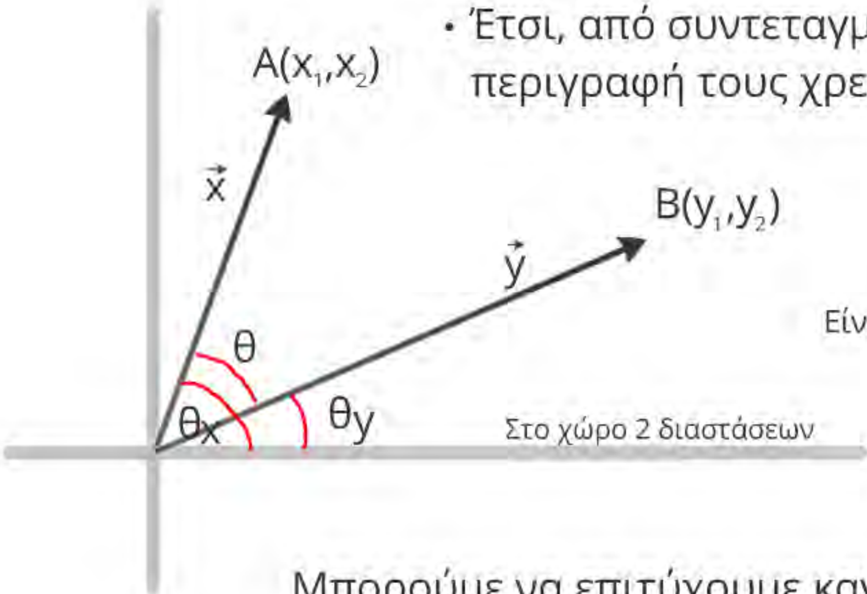
$$\vec{x}\,\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_N y_N = \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu y_\nu$$

Από τον πολλαπλασιασμό πινάκων είναι γνωστό ότι:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu\, y_\nu$$

Έτσι: $\vec{x}\,\vec{y} = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$

Εσωτερικό γινόμενο



- Τα σημεία Α, Β στο χώρο των δύο διαστάσεων αναπαρίστανται με μορφή διανυσμάτων x, y
- Έτσι, από συντεταγμένες τώρα για την περιγραφή τους χρειάζεται μέτρο και γωνία

Είναι:

$$\vec{x} : |\vec{x}| = \left| x_1^2 + x_2^2 \right|^{1/2}, \tan\theta_x = \frac{x_2}{x_1}$$

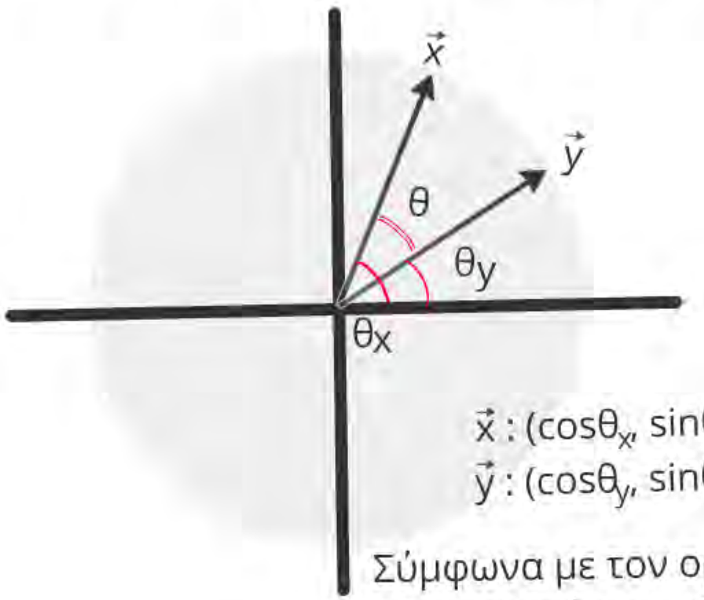
$$\vec{y} : |\vec{y}| = \left| y_1^2 + y_2^2 \right|^{1/2}, \tan\theta_y = \frac{y_2}{y_1}$$

Μπορούμε να επιτύχουμε κανονικοποίηση του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων διαιρώντας με το γινόμενο των μέτρων τους:

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \cos\theta$$

(ο λόγος αντιστοιχεί στο συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων)

Εσωτερικό γινόμενο και συνημίτονο



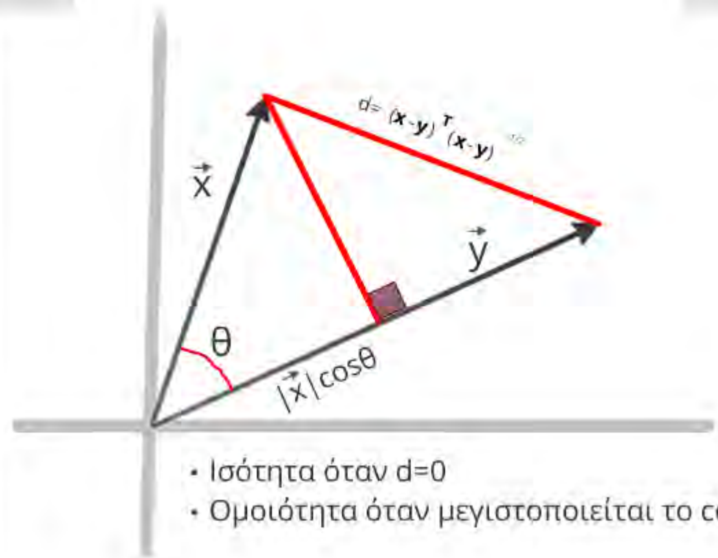
$\vec{x} : (\cos\theta_x, \sin\theta_x)$
$\vec{y} : (\cos\theta_y, \sin\theta_y)$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων

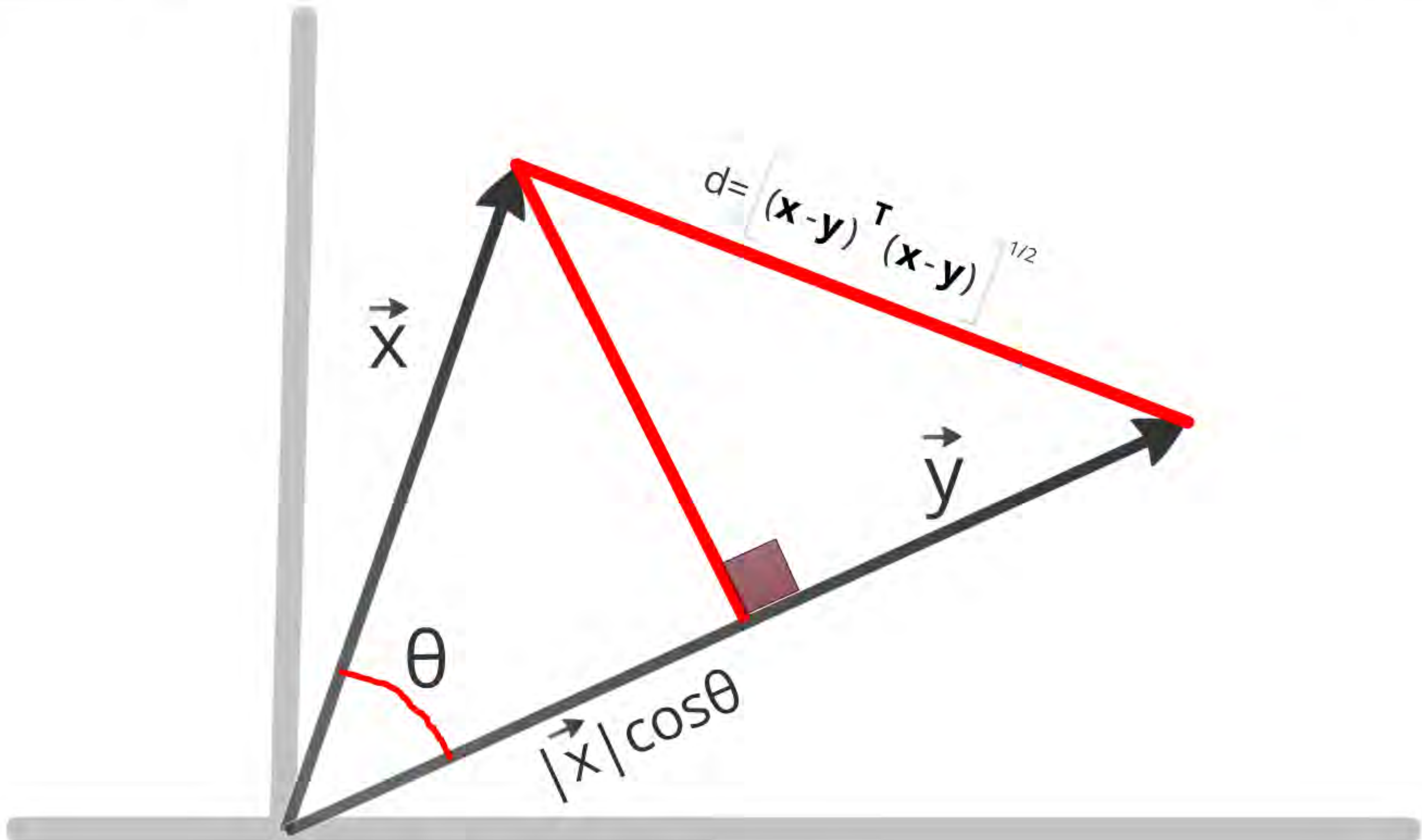
$$x \,.\, y = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \sin\theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_y \\ \sin\theta_y \end{bmatrix} =$$

$$= \cos\theta_x \cos\theta_y + \sin\theta_x \sin\theta_y =$$

$$= \cos(\theta_x - \theta_y) = \cos\theta$$



- Ισότητα όταν d=0
- Ομοιότητα όταν μεγιστοποιείται το cosθ



- Ισότητα όταν d=0
- Ομοιότητα όταν μεγιστοποιείται το cosθ

Στατιστικά του χώρου των προτύπων

Έστω Κ πρότυπα που περιγράφονται σε Ν-διαστάσεις

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{N1} \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{N2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad x_K = \begin{bmatrix} x_{1K} \\ x_{2K} \\ \dots \\ x_{NK} \end{bmatrix}$$

Η μέση τιμή των προτύπων ή "μέσο πρότυπο" ή "αναμενόμενο πρότυπο" ορίζεται ως:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_N \end{bmatrix} \qquad \text{με} \quad \mu_\nu = \frac{1}{K} \sum_{\kappa=1}^{K} x_{\nu\kappa}$$

τη μέση τιμή το ν-οστό χαρακτηριστικό όλων των προτύπων

Παράδειγμα

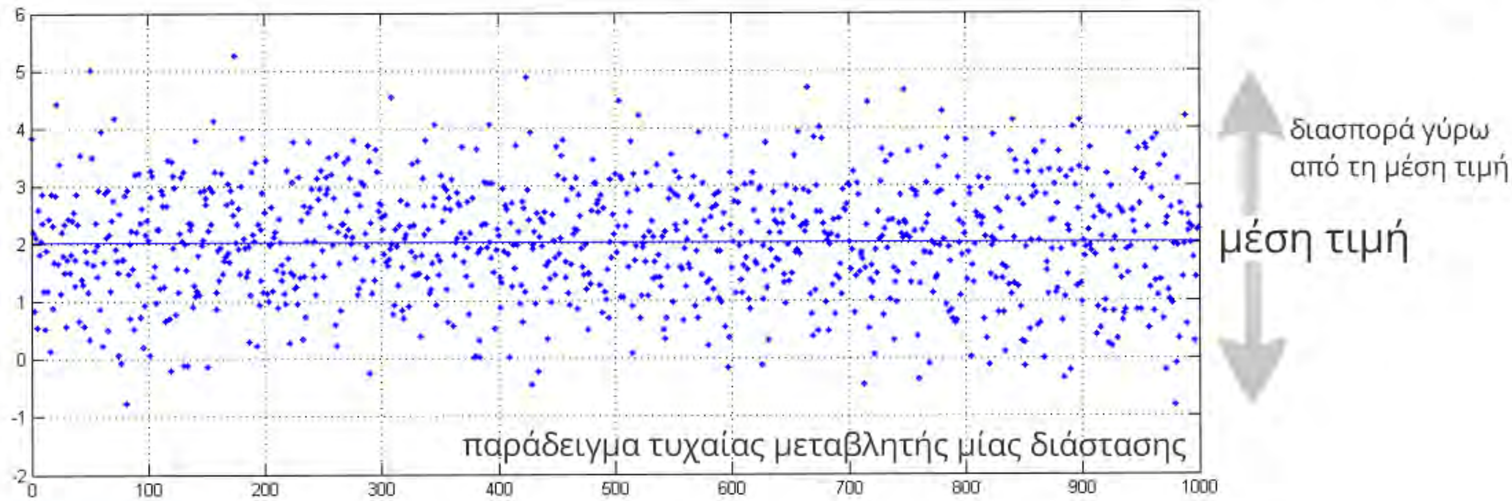
Έστω τα εξής πρότυπα Π1, Π2, Π3, Π4:

$$\Pi 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \Pi 2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Pi 3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Pi 4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Η μέση τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$\mu = \begin{bmatrix} 1/4\,(2+1+3+2) \\ 1/4\,(6+3+1+2) \\ 1/4\,(7+5+2+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Στατιστικά του χώρου των προτύπων



Η μέση τιμή είναι σημαντικό χαρακτηριστικό
αλλά όχι αρκετό για τη σαφή κατανόηση μιας κατανομής

Σημαντική πληροφορία προκύπτει από τη μελέτη της
διασποράς ή απόκλισης γύρω από τη μέση τιμή

Η απόκλιση αυτό ορίζεται με διάφορους τρόπους

Απόλυτη διασπορά/απόκλιση: $$\mathrm{Dev}(X) = \frac{1}{K}\sum_k |x_k - \mu|$$

Απόκλιση/διασπορά: $$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{K}\sum_k (x_k - \mu)^2$$

Τυπική απόκλιση: $$\mathrm{Std}(X) = \left[\frac{1}{K}\sum_k (x_k - \mu)^2\right]^{1/2}$$

Αποδεικνύεται ότι: $\mathrm{Std}(X) >= \mathrm{Dev}(X)$

* Jensen's inequality

Ειδικά για κανονικές κατανομές (Gaussian) υπολογίζεται ότι:

$$\frac{\mathrm{Dev}(X)}{\mathrm{Std}(X)} = \left[\frac{2}{\pi}\right]^{1/2}$$

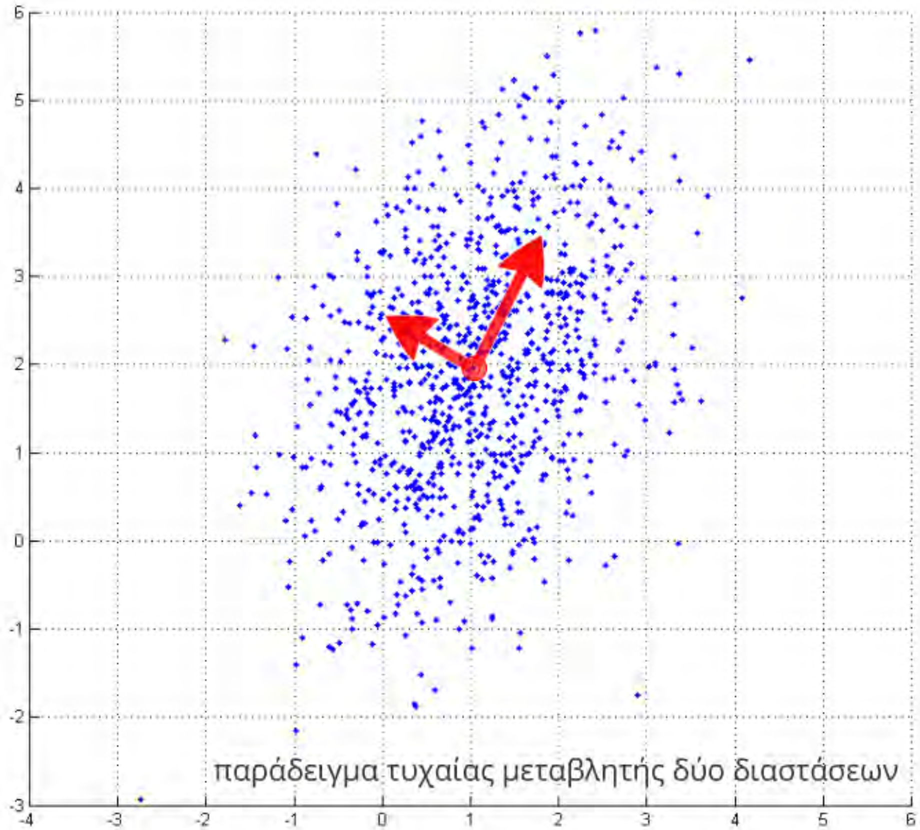
Αποδεικνύεται ότι: Std(X) >= Dev(X)

* Jensen's inequality

Ειδικά για κανονικές κατανομές (Gaussian) υπολογίζεται ότι:

$$\left[\frac{\mathrm{Dev}(X)}{\mathrm{Std}(X)} = \left[\frac{2}{\pi}\right]^{1/2}\right]$$

Διασπορά σε χώρους πολλών διαστάσεων



παράδειγμα τυχαίας μεταβλητής δύο διαστάσεων

Γενίκευση της ιδέας της διασποράς σε περισσότερες διαστάσεις οδηγεί στον ορισμό της έννοιας της συνδιασποράς

Σε δύο διαστάσεις δεν είναι δυνατό να περιγραφεί η κατανομή με τη διασπορά σε κάθε διάσταση γιατί υπάρχει αλληλεπίδραση

Συνδιασπορά στο χώρο των προτύπων

Εφόσον ο χώρος των προτύπων είναι πολυδιάστατος υιοθετούμε την περιγραφή με τον Πίνακα Συνδιασποράς

$$Cov = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(x_k-\mu)(x_k-\mu)^T = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\begin{bmatrix} x_{1k}-\mu_1 \\ x_{2k}-\mu_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{Nk}-\mu_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix}(x_{1k}-\mu_1) & (x_{2k}-\mu_2) & \cdots\cdots & (x_{Nk}-\mu_N)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\begin{bmatrix} (x_{1k}-\mu_1)^2 & (x_{2k}-\mu_2)(x_{1k}-\mu_1) & \cdots\cdots & (x_{1k}-\mu_1)(x_{Nk}-\mu_N) \\ (x_{2k}-\mu_2)(x_{1k}-\mu_1) & (x_{2k}-\mu_2)^2 & \cdots\cdots & (x_{2k}-\mu_2)(x_{Nk}-\mu_N) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (x_{Nk}-\mu_N)(x_{1k}-\mu_1) & (x_{2k}-\mu_2)(x_{Nk}-\mu_N) & \cdots\cdots & (x_{Nk}-\mu_N)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots\cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots\cdots & \sigma_{2N} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots\cdots & \sigma_{NN}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\lambda\nu} = \sigma_{\nu\lambda} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(x_{\lambda k}-\mu_\lambda)(x_{\nu k}-\mu_\nu)$$

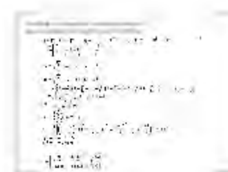
- η **συμμεταβλητότητα ή συνδιασπορά των τιμών των χαρακτηριστικών λ, ν των Κ προτύπων**
- **για λ=ν (στη διαγώνιο) προκύπτει η διασπορά του ν-οστού χαρακτηριστικού των Κ προτύπων**

Ο συντελεστής συσχέτισης δύο χαρακτηριστικών λ, ν ορίζεται από τη σχέση:

$$P_{\lambda\nu} = \frac{\sigma_{\lambda\nu}}{\sigma_\lambda \cdot \sigma_\nu}$$

$$\sigma_\nu = \left[\sigma_\nu^2\right]^{1/2}$$

η τυπική απόκλιση του ν-οστού χαρακτηριστικού



ρη με τον Πινακα Συνδιασπορας

$$Cov = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(x_k-\mu)(x_k-\mu)^T = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\begin{bmatrix} x_{1k}-\mu_1 \\ x_{2k}-\mu_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{Nk}-\mu_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix}(x_{1k}-\mu_1) & (x_{2k}-\mu_2) & \ldots\ldots & (x_{Nk}-\mu_N)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\begin{bmatrix} (x_{1k}-\mu_1)^2 & (x_{2k}-\mu_2)(x_{1k}-\mu_1) & \ldots\ldots & (x_{1k}-\mu_1)(x_{Nk}-\mu_N) \\ (x_{2k}-\mu_2)(x_{1k}-\mu_1) & (x_{2k}-\mu_2)^2 & \ldots\ldots & (x_{2k}-\mu_2)(x_{Nk}-\mu_N) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (x_{Nk}-\mu_N)(x_{1k}-\mu_1) & (x_{2k}-\mu_2)(x_{Nk}-\mu_N) & \ldots\ldots & (x_{Nk}-\mu_N)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots\ldots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots\ldots & \sigma_{2N} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \ldots\ldots & \sigma_{NN}^2 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{\lambda\nu} = \sigma_{\nu\lambda} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(x_{\lambda k}-\mu_\lambda)(x_{\nu k}-\mu_\nu)$$

- η **συμμεταβλητότητα** ή **συνδιασπορά** των τιμών των χαρακτηριστικών λ, ν των Κ προτύπων
- για λ=ν (στη διαγώνιο) προκύπτει η **διασπορά** του ν-οστού χαρακτηριστικού των Κ προτύπων

τισης δύο χαρακτηριστικών

σ_{N1} σ_{N2} ...... σ^2_{NN}

Ο συντελεστής συσχέτισης δύο χαρακτηριστικών λ, ν ορίζεται από τη σχέση:

$$P_{\lambda\nu} = \frac{\sigma_{\lambda\nu}}{\sigma_\lambda . \sigma_\nu}$$

$$\sigma_\nu = \left[\sigma^2_\nu\right]^{1/2}$$

η τυπική απόκλιση του ν-οστού χαρακτηριστικού

Παράδειγμα υπολογισμού πίνακα συνδιασποράς.
Έστω τα τέσσερα διανύσματα τριών διαστάσεων:

$$x_1 = [2 \quad 1 \quad -1]^T, \qquad x_2 = [1 \quad 3 \quad -1]^T, \qquad x_3 = [-2 \quad 1 \quad 0]^T, \qquad x_4 = [-3 \quad -2 \quad 1]^T$$

$$\mu = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+1-2-3 \\ 1+3+1-2 \\ -1-1+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\lambda\nu} = \frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{K}}(x_{\lambda\kappa} - \mu_\lambda)(x_{\nu\kappa} - \mu_\nu)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{K}}(x_{1\kappa} - \mu_1)(x_{2\kappa} - \mu_2)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\left(2-\tfrac{-1}{2}\right)\left(1-\tfrac{3}{4}\right) + \left(1-\tfrac{-1}{2}\right)\left(3-\tfrac{3}{4}\right) + \left(-2-\tfrac{-1}{2}\right)\left(1-\tfrac{3}{4}\right) + \left(-3-\tfrac{-1}{2}\right)\left(-2-\tfrac{3}{4}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{5}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2}\tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{2}\tfrac{11}{4}\right] = 2.625$$

$$\sigma_{13} = \cdots = 0.6875$$

$$\sigma_{23} = \cdots = -1.3125$$

$$\sigma_\lambda{}^2 = \frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{K}}(x_{\lambda\kappa} - \mu_\lambda)^2$$

$$\sigma_1{}^2 = \frac{1}{\mathrm{K}}\left[\left(2-\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(-2-\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(-3-\frac{-1}{2}\right)^2\right] = 4.25$$

$$\sigma_2{}^2 = \cdots = 3.1875$$

$$\sigma_3{}^2 = \cdots = 0.6875$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 4.25 & 2.625 & -1.625 \\ 2.625 & 3.1875 & -1.3125 \\ -1.625 & -1.3125 & 0.6875 \end{bmatrix}$$

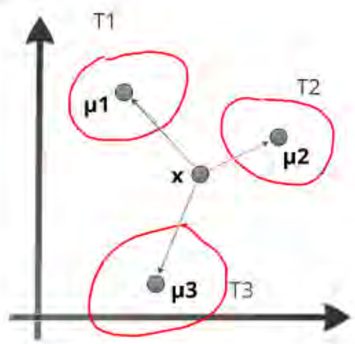
Μέθοδοι αναγνώρισης
Ταξινομητές με επόπτη

Αναγνώριση με βάση τα κέντρα των κλάσεων

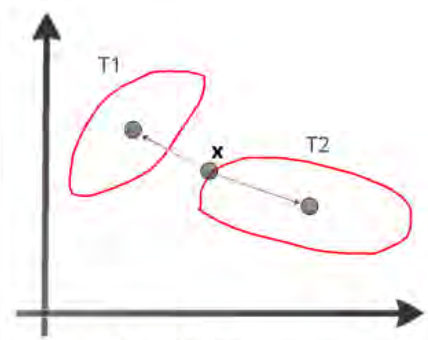
- Κατά την εκμάθηση: υπολογισμός μέσης τιμής κάθε κλάσης
- Κατά την ταξινόμηση: ταξινόμηση κάθε νέου προτύπου στην κλάση από της οποίας το κέντρο απέχει λιγότερο

$$\mathbf{x} \longrightarrow \min_{t} \left[d(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^t) \right]$$

με T το πλήθος των κλάσεων και μ^t τα κέντρα τους

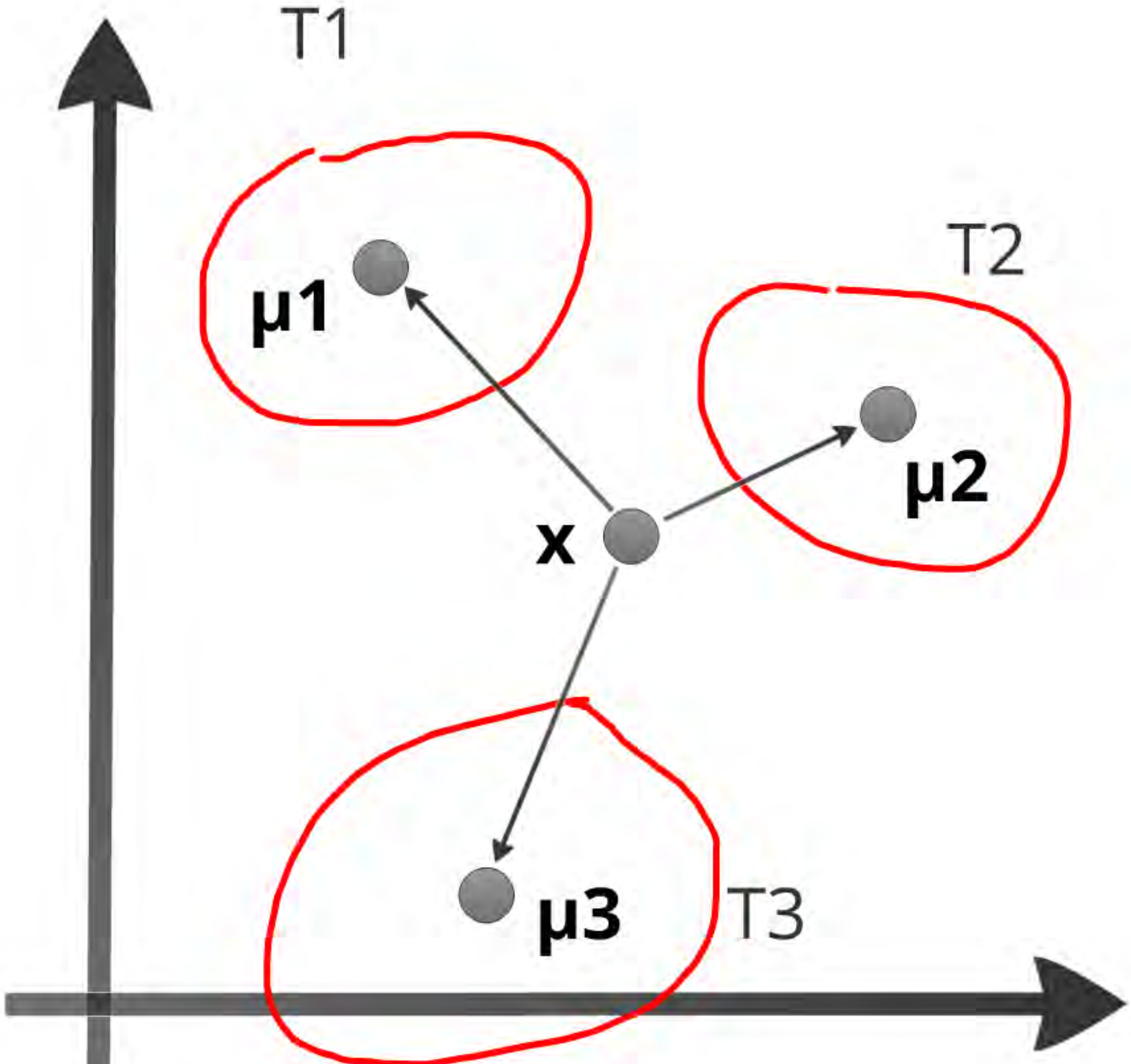


$\mathbf{x} \longrightarrow$ T2
ορθώς ταξινομείται στην κλάση T2



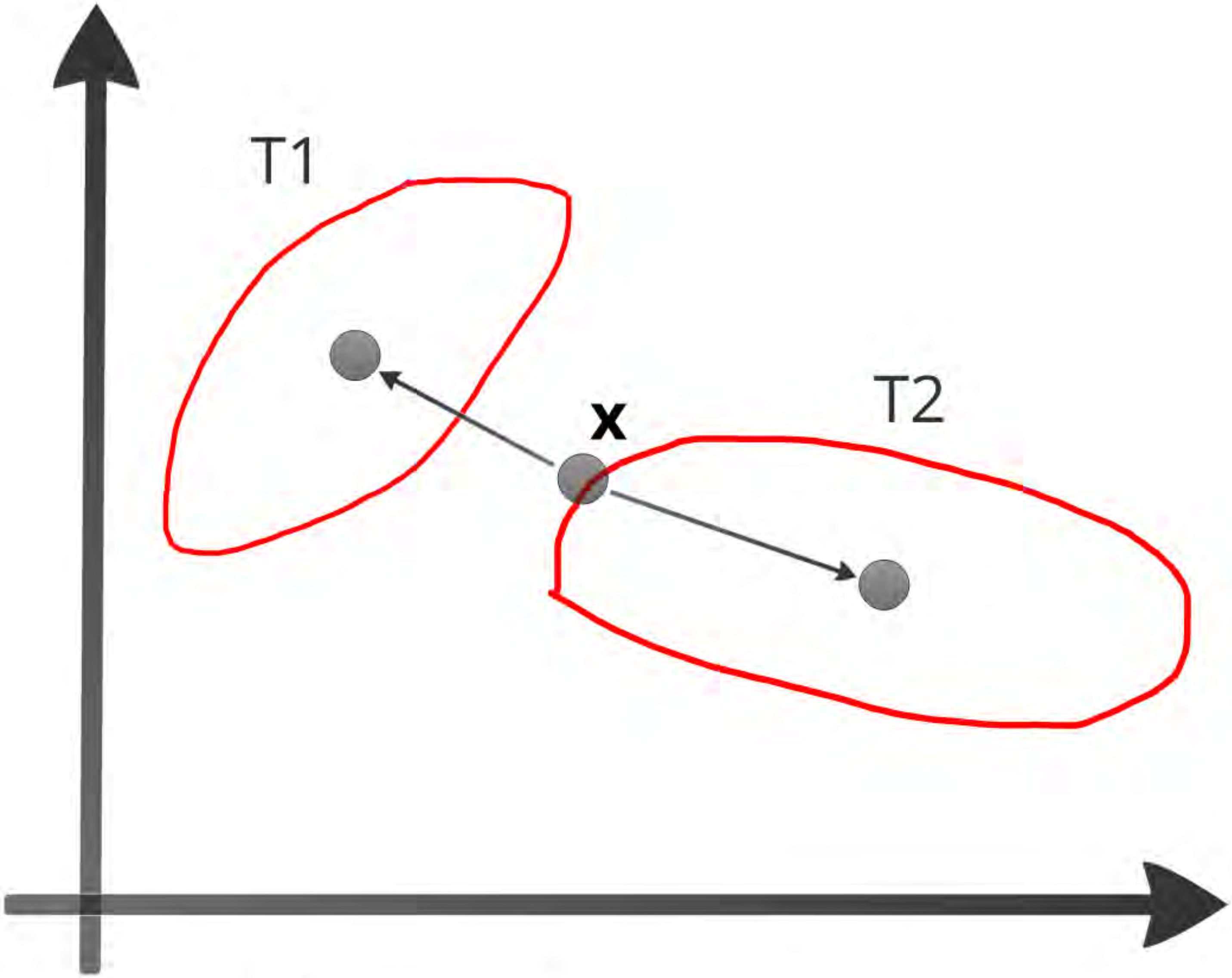
$\mathbf{x} \longrightarrow$ T1
λανθασμένα ταξινομείται στην κλάση T1

Η μέθοδος είναι αποδοτική όταν οι κλάσεις έχουν μορφή υπερσφαιρών με ακτίνες μικρότερες της ημιαπόστασης των κέντρων τους



x ⟶ T2

ορθώς ταξινομείται στην κλάση T2



x → T1

λανθασμένα ταξινομείται στην κλάση T1

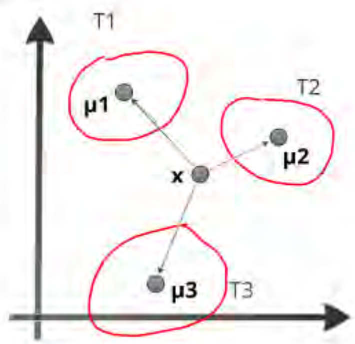
Μέθοδοι αναγνώρισης
Ταξινομητές με επόπτη

Αναγνώριση με βάση τα κέντρα των κλάσεων

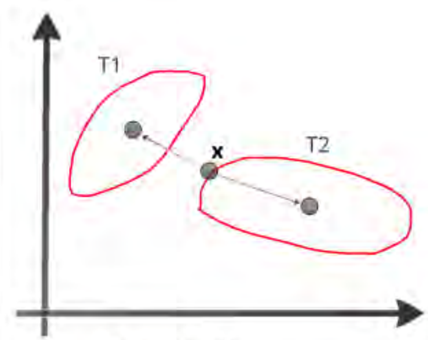
- Κατά την εκμάθηση: υπολογισμός μέσης τιμής κάθε κλάσης
- Κατά την ταξινόμηση: ταξινόμηση κάθε νέου προτύπου στην κλάση από της οποίας το κέντρο απέχει λιγότερο

$$\mathbf{x} \longrightarrow \min_{t} \left[d(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^{t}) \right]$$

με Τ το πλήθος των κλάσεων και μ^t τα κέντρα τους



x ⟶ T2
ορθώς ταξινομείται στην κλάση T2

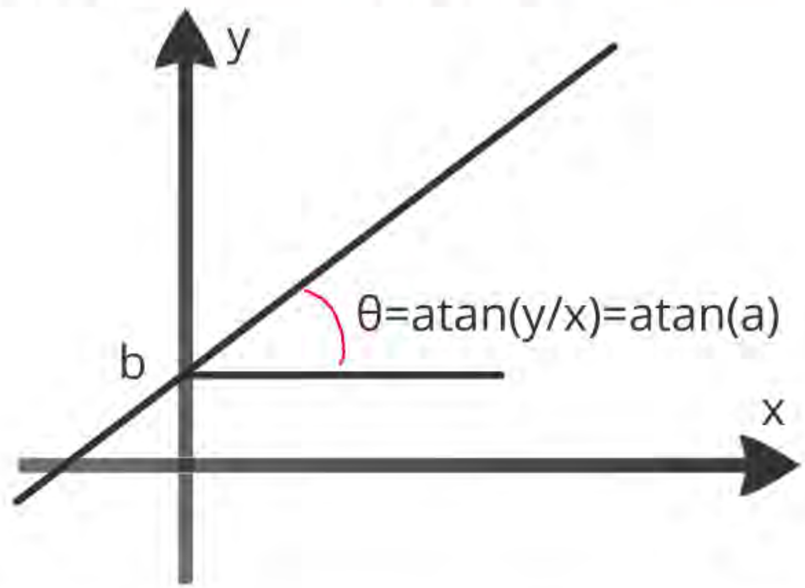


x ⟶ T1
λανθασμένα ταξινομείται στην κλάση T1

Η μέθοδος είναι αποδοτική όταν οι κλάσεις έχουν μορφή υπερσφαιρών με ακτίνες μικρότερες της ημιαπόστασης των κέντρων τους

Μέθοδοι αναγνώρισης
Ταξινομητές με επόπτη
Αναγνώριση με γραμμικές συναρτήσεις

Η γενική εξίσωση της ευθείας είναι γνωστή ως: $y = a\,x + b$
με γραφική παράσταση την εξής:



Μετασχηματίζουμε την εξίσωση ως εξής:

$y=ax+b \Rightarrow ax+b-y=0$ ή $ax-y+b=0$

πολλαπλασιάζοντας επί έναν πραγματικό αριθμό w_2, προκύπτει:

$$w_1 x + w_2 y + w_3 = 0$$

με $w_1 = a\,w_2$ και $w_3 = b\,w_2$

Στην περίπτωση μας, όταν διάνυσμα αναπαρίσταται ως: $\vec{x}(x_1, x_2)$
τότε η εξίσωση της ευθείας που περνά από το πέρας του είναι:

$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3 = 0$ ή $d(\mathbf{x}) = 0$

όπου $d(\mathbf{x}) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση ως εξής:

$y=ax+b \Rightarrow ax+b-y=0$ ή $ax-y+b=0$

πολλαπλασιάζοντας επί έναν πραγματικό αριθμό w_2, προκύπτει:

$$w_1x + w_2y + w_3 = 0$$

με $w_1 = a\,w_2$ και $w_3 = b\,w_2$

Στην περίπτωση μας, όταν διάνυσμα αναπαρίσταται ως: $\overrightarrow{x}(x_1, x_2)$
τότε η εξίσωση της ευθείας που περνά από το πέρας του είναι:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3 = 0 \quad \text{ή} \quad d(\mathbf{x}) = 0$$

όπου $d(\mathbf{x}) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Μέθοδοι αναγνώρισης
Ταξινομητές με επόπτη

Αναγνώριση με γραμμικές συναρτήσεις

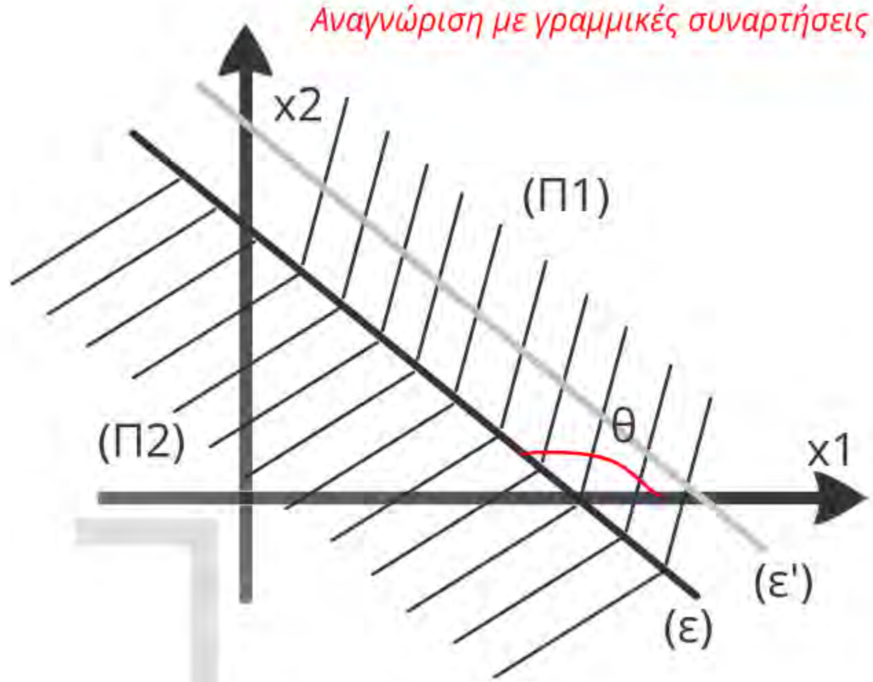
Έστω η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3 = 0$$

Η (ε) χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα (Π1) και (Π2).

Τέμνει τον άξονα x2 στο σημείο: $\left(0, -\frac{w_3}{w_2}\right)$

ενώ η κλίση της είναι: $\left(\tan\theta = -\frac{w_1}{w_2}\right)$



Για d>0, ορίζουμε νέα ευθεία (ε') ως:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3 - d = 0$$

Η (ε') τέμνει τον άξονα x2 στο σημείο: $\left(0, \frac{-w_3+d}{w_2}\right)$

ενώ η κλίση της είναι: $\left(\tan\theta' = -\frac{w_1}{w_2}\right)$

Συνεπώς (ε')//(ε).

Αν $w_2>0$ τότε όλα τα σημεία της (ε') βρίσκονται στο (Π1)
και συνεπώς για κάθε d>0 η (ε') σαρώνει όλο το (Π1)

Σύμφωνα όμως με τον ορισμό της (ε'): $d(x) - d = 0$, οπότε $d(x) > 0$ και άρα η σχέση $d(x) > 0$ ισχύει για όλο το ημιεπίπεδο (Π1).

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $d(x) < 0$ ισχύει για το (Π2).

Η d(x) καλείται **γραμμική διακριτή συνάρτηση** και **η ταξινόμηση που παρέχει εξαρτάται από τις σχέσεις**

$d(x)>0$, $d(x)<0$

ενώ για $d(x)=0$ υπάρχει απροσδιοριστία

Για d>0, ορίζουμε νέα ευθεία (ε') ως:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 - d = 0$$

Η (ε') τέμνει τον άξονα x2 στο σημείο: $\left(0, \frac{-w_3+d}{w_2}\right)$

ενώ η κλίση της είναι: $\tan\theta' = -\frac{w_1}{w_2}$

Συνεπώς (ε')//(ε).

Αν $w_2>0$ τότε όλα τα σημεία της (ε') βρίσκονται στο (Π1)
και συνεπώς για κάθε d>0 η (ε') σαρώνει όλο το (Π1)

Σύμφωνα όμως με τον ορισμό της (ε'): d(x) - d = 0, οπότε d(x) > 0 και άρα η σχέση d(x) > 0 ισχύει για όλο το ημιεπίπεδο (Π1).

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι d(x) < 0 ισχύει για το (Π2).

Μέθοδοι αναγνώρισης
Ταξινομητές με επόπτη

Αναγνώριση με γραμμικές συναρτήσεις

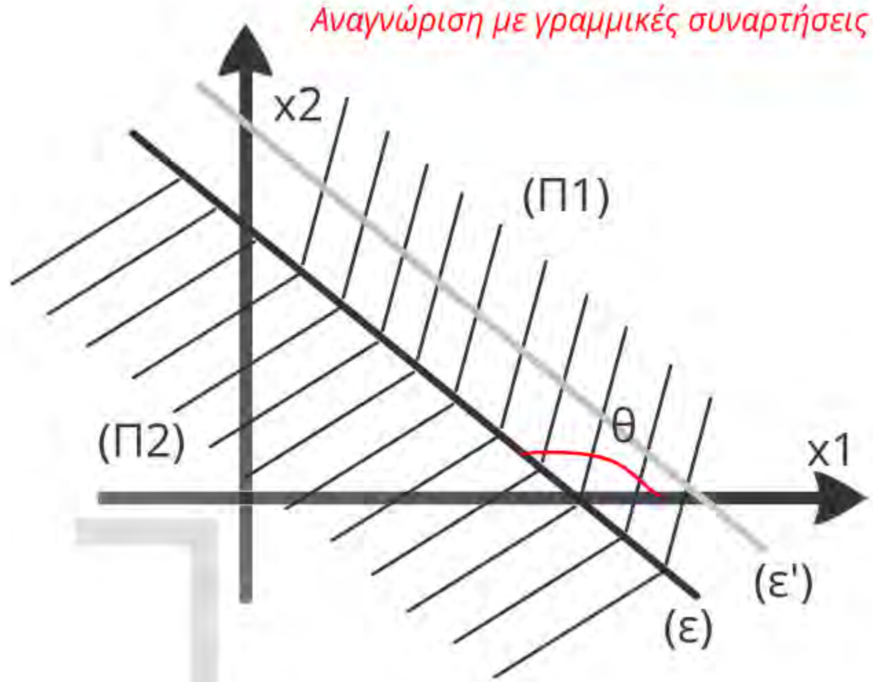
Έστω η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3 = 0$$

Η (ε) χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα (Π1) και (Π2).

Τέμνει τον άξονα x2 στο σημείο: $\left(0, -\frac{w_3}{w_2}\right)$

ενώ η κλίση της είναι: $\left(\tan\theta = -\frac{w_1}{w_2}\right)$



Για d>0, ορίζουμε νέα ευθεία (ε') ως:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3 - d = 0$$

Η (ε') τέμνει τον άξονα x2 στο σημείο: $\left(0, \frac{-w_3+d}{w_2}\right)$

ενώ η κλίση της είναι: $\left(\tan\theta' = -\frac{w_1}{w_2}\right)$

Συνεπώς (ε')//(ε).

Αν $w_2>0$ τότε όλα τα σημεία της (ε') βρίσκονται στο (Π1)
και συνεπώς για κάθε d>0 η (ε') σαρώνει όλο το (Π1)

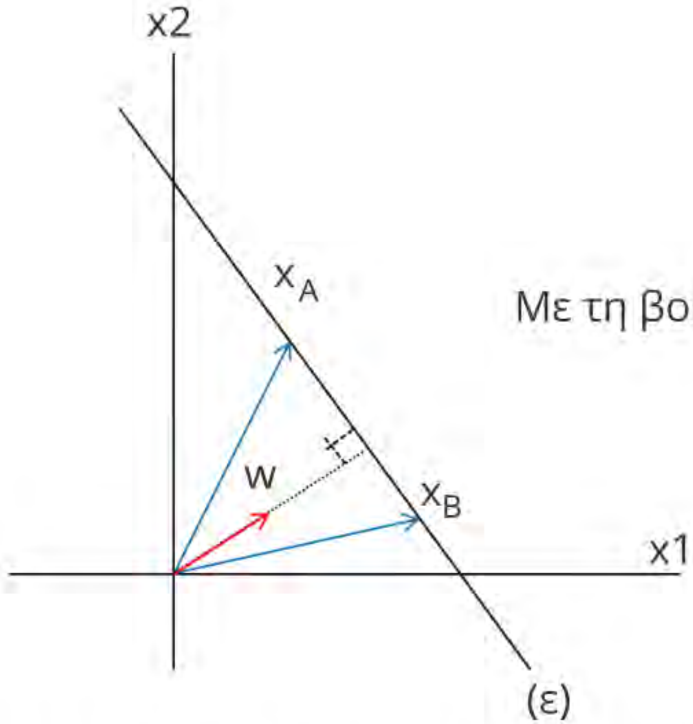
Σύμφωνα όμως με τον ορισμό της (ε'): $d(x) - d = 0$, οπότε $d(x) > 0$ και άρα η σχέση $d(x) > 0$ ισχύει για όλο το ημιεπίπεδο (Π1).

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $d(x) < 0$ ισχύει για το (Π2).

Η d(x) καλείται γραμμική διακριτή συνάρτηση και η ταξινόμηση που παρέχει εξαρτάται από τις σχέσεις

$d(x)>0$, $d(x)<0$

ενώ για $d(x)=0$ υπάρχει απροσδιοριστία



Μέθοδοι αναγνώρισης
Ταξινομητές με επόπτη

Αναγνώριση με γραμμικές συναρτήσεις

Με τη βοήθεια πινάκων οι σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\begin{aligned} d(x) &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 \\ &= \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} + w_3 \end{aligned}$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\; w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εάν το πέρας των x_A, x_B είναι πάνω στην (ε) τότε για το καθένα ικανοποιείται η εξίσωση d(x)

$$\left.\begin{aligned} w_1 x_{A1} + w_2 x_{A2} + w_3 = 0 \\ w_1 x_{B1} + w_2 x_{B2} + w_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_1 x_{A1} + w_2 x_{A2} = w_1 x_{B1} + w_2 x_{B2}$$

$$w_1(x_{A1} - x_{B1}) + w_2(x_{A2} - x_{B2}) = 0$$

$$[w_1 \quad w_2]\begin{bmatrix} x_{A1} - x_{B1} \\ x_{A2} - x_{B2} \end{bmatrix} = 0$$

$$w^T(x_A - x_B) = 0$$

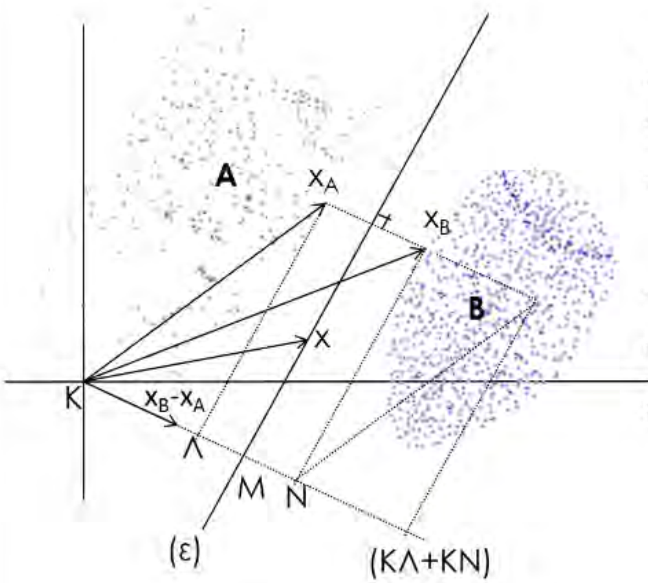
Αυτό σημαίνει όμως ότι το **w** είναι κάθετο στην (ε)
(σύμφωνα με τα όσα ορίστηκαν στο εσωτερικό γινόμενο)

Μέθοδοι αναγνώρισης
Ταξινομητές με επόπτη
Αναγνώριση με γραμμικές συναρτήσεις

Ζητούμενο κατά την εκπαίδευση του ταξινομητή είναι να οριστούν οι συντελεστές της (ε): w_1, w_2 , w_3

αφού όπως φάνηκε, η ευθεία αυτή μπορεί να παρέχει μια σχέση για την ταξινόμηση

$d(x) > 0$ ή $d(x) < 0$



Αν $\mathbf{x_A}$ και $\mathbf{x_B}$ οι πίνακες των πιο κοντινών σημείων των δύο κλάσεων

τότε μια κατάλληλη ευθεία (ε) για τον καθορισμό των ημιεπιπέδων είναι η μεσοκάθετος στο

$$\vec{X_B} - \vec{X_A}$$

Η προβολή κάθε διανύσματος x με πέρας στην (ε)

$$\forall x\ :\ \cos\theta = \frac{(x_A - x_B)^T x}{|x_A - x_B||x\ |} \Rightarrow$$

$$\overline{\text{KM}} = \cos\theta\,|x\ | = \frac{(x_A - x_B)^T x}{|x_A - x_B|}$$

$$x_A\!:\ \cos\theta = \frac{(x_A - x_B)^T x_A}{|x_A - x_B||x_A|} \Rightarrow$$

$$\overline{\text{K}\Lambda} = \cos\theta\,|x_A| = \frac{(x_A - x_B)^T x_A}{|x_A - x_B|}$$

$$x_B\!:\overline{\text{KN}} = \frac{(x_A - x_B)^T x_B}{|x_A - x_B|}$$

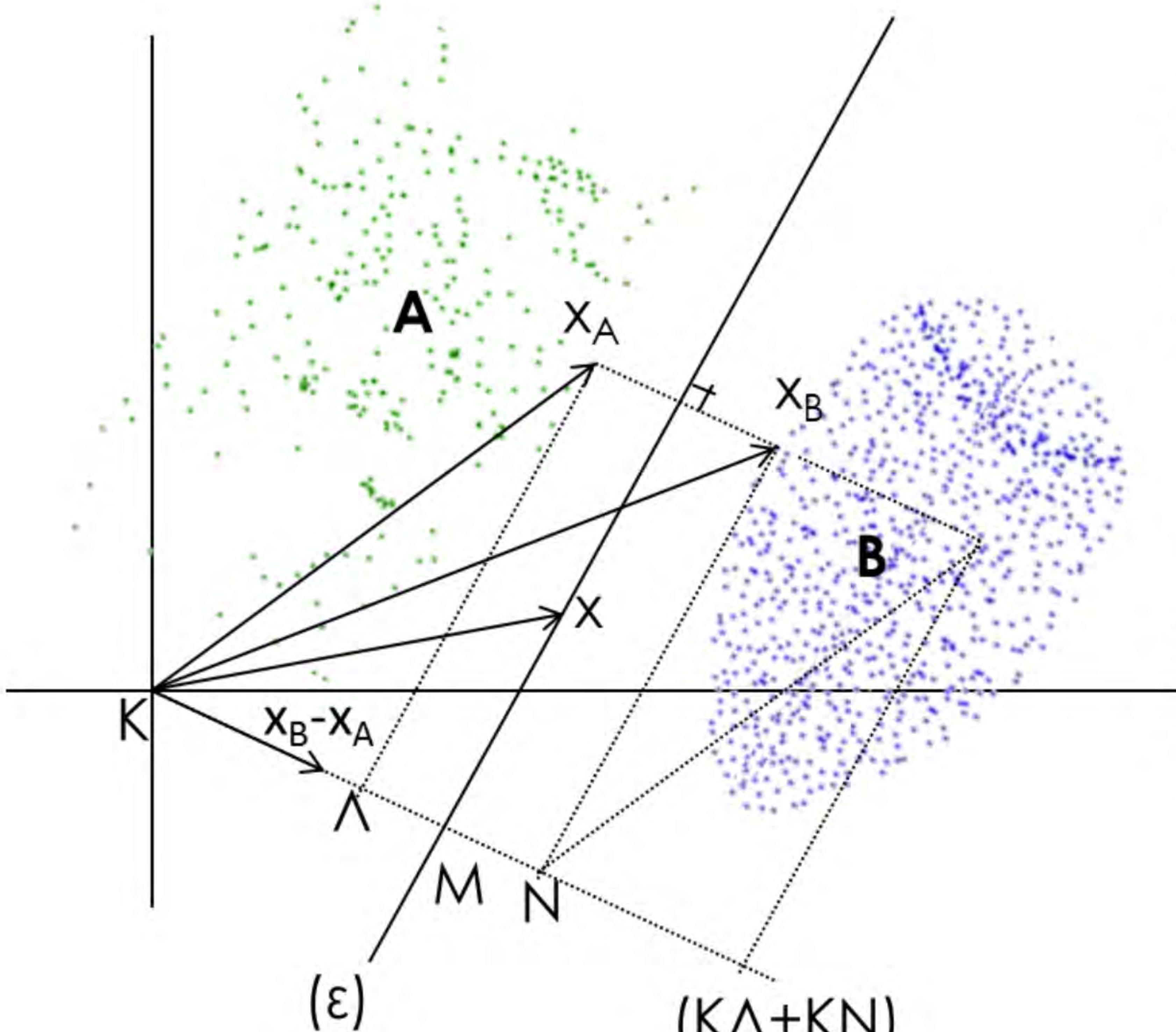
$$\overline{\text{KM}} = \frac{1}{2}(\overline{\text{K}\Lambda} + \overline{\text{KN}})$$

Έτσι:
$$(x_A - x_B)^T \cdot x = \frac{1}{2}[(x_A - x_B)^T \cdot x_A + (x_A - x_B)^T \cdot x_B]$$
$$= \frac{1}{2}[{x_A}^T \cdot x_A - {x_B}^T \cdot x_B]$$

$$(x_A - x_B)^T \cdot x - \frac{1}{2}[{x_A}^T \cdot x_A - {x_B}^T \cdot x_B] = 0$$

και συνεπώς πάνω στην ευθεία (ε):

$$(\varepsilon)\!:\ d(x) = w^T x + w_3 = 0\ \rightarrow \begin{cases} w = x_A - x_B \\ w_3 = -\dfrac{1}{2}({x_A}^T \cdot x_A - {x_B}^T \cdot x_B) \end{cases}$$



Αν **x**

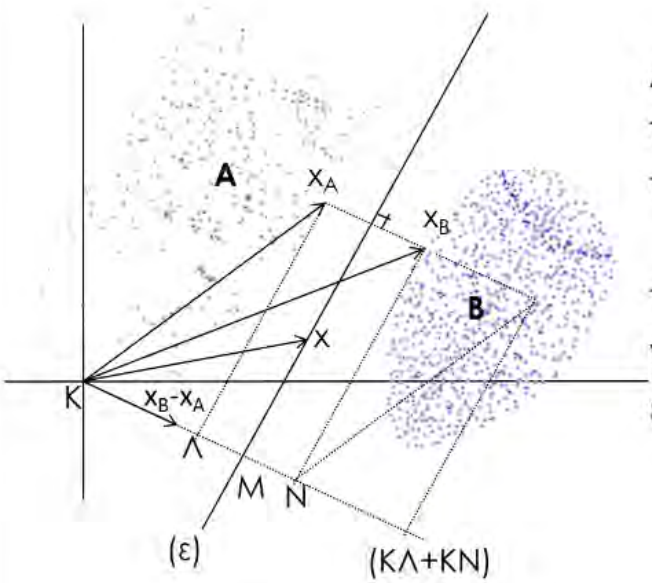
των

των

τότε

για τ

είνα



Αν $\mathbf{x_A}$ και $\mathbf{x_B}$ οι πίνακες των πιο κοντινών σημείων των δύο κλάσεων

τότε μια κατάλληλη ευθεία (ε) για τον καθορισμό των ημιεπιπέδων είναι η μεσοκάθετος στο

$$\vec{X}_B - \vec{X}_A$$

Η προβολή κάθε διανύσματος x με πέρας στην (ε)

$$\forall x\ :\ \cos\theta = \frac{(x_A - x_B)^T x}{|x_A - x_B||x\ |} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{KM}} = \cos\theta\,|x\ | = \frac{(x_A - x_B)^T x}{|x_A - x_B|}$$

$$x_A\text{: } \cos\theta = \frac{(x_A - x_B)^T x_A}{|x_A - x_B||x_A|} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{K\Lambda}} = \cos\theta\,|x_A| = \frac{(x_A - x_B)^T x_A}{|x_A - x_B|}$$

$$x_B\text{: } \overline{\mathrm{KN}} = \frac{(x_A - x_B)^T x_B}{|x_A - x_B|}$$

$$\overline{\mathrm{KM}} = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{K\Lambda}} + \overline{\mathrm{KN}})$$

Έτσι:

$$(x_A - x_B)^T \cdot x = \frac{1}{2}[(x_A - x_B)^T \cdot x_A + (x_A - x_B)^T \cdot x_B]$$
$$= \frac{1}{2}[x_A{}^T \cdot x_A - x_B{}^T \cdot x_B]$$

$$(x_A - x_B)^T \cdot x - \frac{1}{2}[x_A{}^T \cdot x_A - x_B{}^T \cdot x_B] = 0$$

και συνεπώς πάνω στην ευθεία (ε):

$$(\varepsilon)\text{: } d(x) = w^T x + w_3 = 0 \ \rightarrow \begin{cases} w = x_A - x_B \\ w_3 = -\dfrac{1}{2}(x_A{}^T \cdot x_A - x_B{}^T \cdot x_B) \end{cases}$$

Παράδειγμα για την εύρεση της μεσοκαθέτου ως ευθείας (ε) διαχωρισμού σε ημιεπίπεδα

$x_A = [0 \quad 1]^T, x_B = [2 \quad 3]^T$

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα διανύσματα αυτά είναι:

$$w^T \cdot x + w_3 = 0$$
$$w = x_A - x_B = [-2 \quad -2]^T$$
$$w_3 = -\frac{1}{2}({x_A}^T x_A - {x_B}^T x_B) = -\frac{1}{2}\left([0 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - [2 \quad 3]\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = 6$$

Άρα, τελικά η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας (ε) είναι:

$$d(x) = w^T \cdot x + w_3 = 0 \Rightarrow$$

$$[-2 \quad -2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(\varepsilon) \to x_1 + x_2 - 3 = 0$$

Έστω τρία διανύσματα:

$$x_A = [1 \quad 2]^T, x_B = [0 \quad 3]^T \xrightarrow{?} x_C = [2 \quad 1]^T$$

Η μεσοκάθετος σε σχέση με τα δύο πρώτα είναι:

$$w^T \cdot x + w_3 = 0$$
$$w = x_A - x_B = [1 \quad -1]^T$$
$$w_3 = -\frac{1}{2}({x_A}^T x_A - {x_B}^T x_B) = -\frac{1}{2}\left([1 \quad 2]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - [0 \quad 3]\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right) = 2$$

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου δίνεται:

$$d(x) = w^T \cdot x + w_3 = 0 \Rightarrow [1 \quad -1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + 2 = 0 \Rightarrow (\varepsilon) \rightarrow x_1 - x_2 + 2 = 0$$

Συνεπώς, το κάθε διάνυσμα βρίσκεται σε ένα ημιεπίπεδο και το τρίτο διάνυσμα βρίσκεται:

$$d(x_A) = 1 > 0\ (\Pi_\mathrm{A}), \qquad d(x_B) = -1 < 0 (\Pi_\mathrm{B}), \qquad d(x_C) = 3 > 0 \rightarrow (\Pi_\mathrm{A})$$

Γενίκευση σε περισσότερες των 2 διαστάσεων: Ν-διάστασεις

Η σχέση γίνεται:

$$(\varepsilon):\ d(x) = w^T x + w_{N+1} = 0\ \rightarrow \begin{cases} w = x_A - x_B \\ w_{N+1} = -\frac{1}{2}\left(x_A{}^T \cdot x_A - x_B{}^T \cdot x_B\right) \end{cases}$$

Και τώρα η d(x) περιγράφει ένα υπερεπίπεδο που χωρίζει τον E^Nσε δύο μέρη για d(x)>0 και d(x)<0

Παράδειγμα τριών 4-διάστατων διανυσμάτων:

$$x_A = [0\quad 2\quad 0\quad 1]^T, x_B = [1\quad 0\quad -1\quad 0]^T \overset{?}{\rightarrow} x_C = [-1\quad 2\quad 1\quad 0]^T$$

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου στα δύο πρώτα:

$$w^T \cdot x + w_5 = 0$$
$$w = x_A - x_B = [-1\quad 2\quad 1\quad 1]^T$$
$$w_5 = -\frac{1}{2}(x_A{}^T x_A - x_B{}^T x_B) = -\frac{1}{2}\left([0\quad 2\quad 0\quad 1]\begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix} - [1\quad 0\quad -1\quad 0]\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = -1.5$$

Συνεπώς η εξίσωση (ε) είναι:

$$d(x) = w^T \cdot x + w_5 = 0 \Rightarrow [-1\quad 2\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} - 1.5 = 0 \Rightarrow (\varepsilon) \rightarrow -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 1.5 = 0$$

Και έτσι, τα διανύσματα βρίσκονται στα εξής υπερεπίπεδα:

$$d(x_A) = 3.5 > 0\ (\Pi_A),\qquad d(x_B) = -3.5 < 0 (\Pi_B),\qquad d(x_C) = 4.5 > 0 \rightarrow (\Pi_A)$$

γράφει ένα υπερεπίπεδο που
ο μέρη για d(x)>0 και d(x)<0

Παράδειγμα τριών 4-διάστατων διανυσμάτων:

$$x_A = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 1]^T, x_B = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T \overset{?}{\rightarrow} x_C = [-1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]^T$$

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου στα δύο πρώτα:

$$w^T \cdot x + w_5 = 0$$
$$w = x_A - x_B = [-1 \quad 2 \quad 1 \quad 1]^T$$
$$w_5 = -\frac{1}{2}({x_A}^T x_A - {x_B}^T x_B) = -\frac{1}{2}\left([0 \quad 2 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix} - [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = -1.5$$

Συνεπώς η εξίσωση (ε) είναι:

$$d(x) = w^T \cdot x + w_5 = 0 \Rightarrow [-1 \quad 2 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} - 1.5 = 0 \Rightarrow (\varepsilon) \rightarrow -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 1.5 = 0$$

Και έτσι, τα διανύσματα βρίσκονται στα εξής υπερεπίπεδα:

$$d(x_A) = 3.5 > 0\ (\Pi_A), \qquad d(x_B) = -3.5 < 0 (\Pi_B), \qquad d(x_C) = 4.5 > 0 \rightarrow (\Pi_A)$$

Γενίκευση σε περισσότερες των 2 διαστάσεων: Ν-διάστασεις

Η σχέση γίνεται:

$$(\varepsilon):\ d(x) = w^T x + w_{N+1} = 0 \ \rightarrow \begin{cases} w = x_A - x_B \\ w_{N+1} = -\frac{1}{2}\left(x_A{}^T \cdot x_A - x_B{}^T \cdot x_B\right) \end{cases}$$

Και τώρα η d(x) περιγράφει ένα υπερεπίπεδο που χωρίζει τον E^Nσε δύο μέρη για d(x)>0 και d(x)<0

Παράδειγμα τριών 4-διάστατων διανυσμάτων:

$$x_A = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 1]^T, x_B = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T \overset{?}{\rightarrow} x_C = [-1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]^T$$

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου στα δύο πρώτα:

$$w^T \cdot x + w_5 = 0$$

$$w = x_A - x_B = [-1 \quad 2 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$w_5 = -\frac{1}{2}\left(x_A{}^T x_A - x_B{}^T x_B\right) = -\frac{1}{2}\left([0 \quad 2 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix} - [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = -1.5$$

Συνεπώς η εξίσωση (ε) είναι:

$$d(x) = w^T \cdot x + w_5 = 0 \Rightarrow [-1 \quad 2 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} - 1.5 = 0 \Rightarrow (\varepsilon) \rightarrow -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 1.5 = 0$$

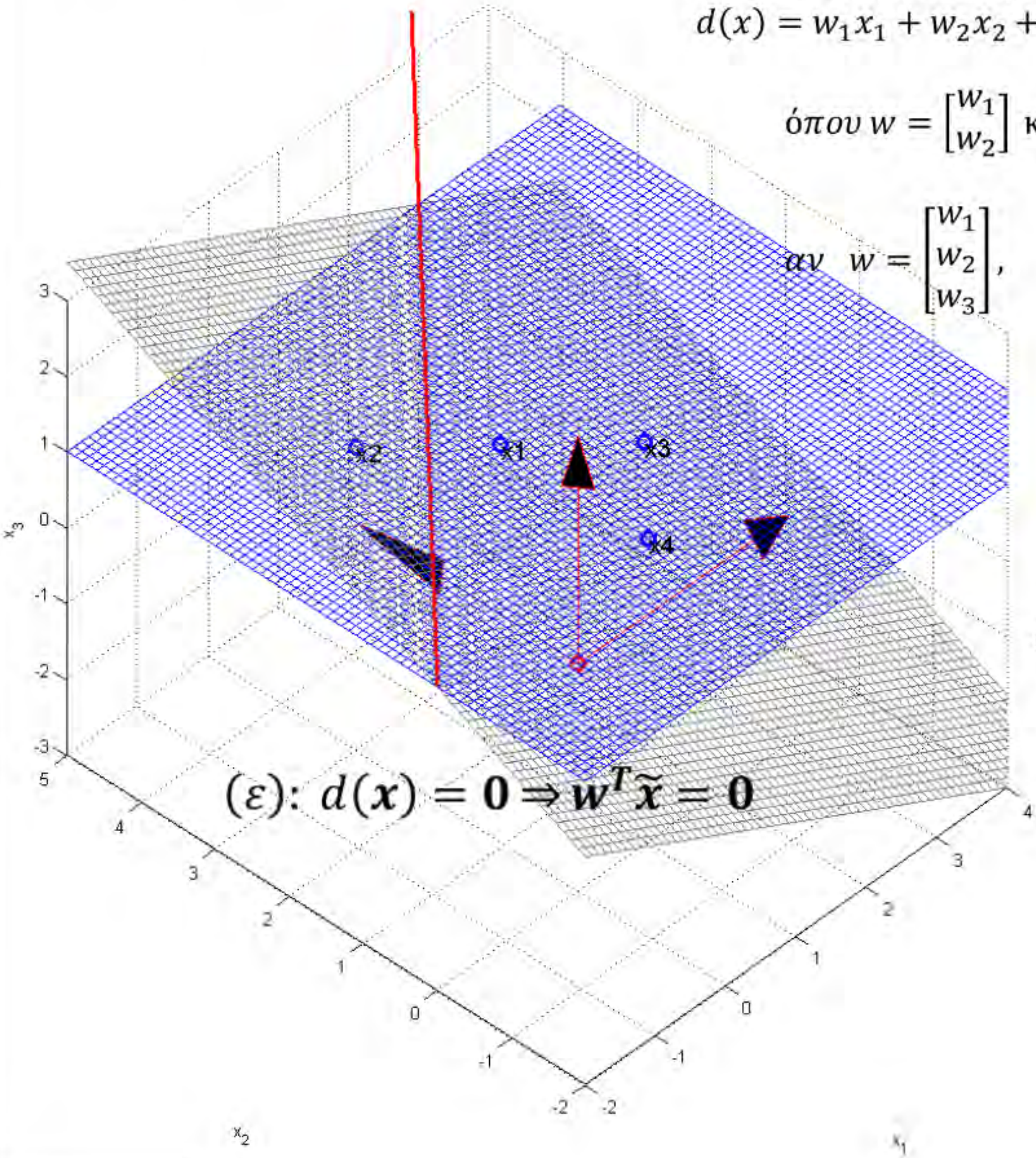
Και έτσι, τα διανύσματα βρίσκονται στα εξής υπερεπίπεδα:

$$d(x_A) = 3.5 > 0\ (\Pi_A), \qquad d(x_B) = -3.5 < 0 (\Pi_B), \qquad d(x_C) = 4.5 > 0 \rightarrow (\Pi_A)$$

Επαυξημένα διανύσματα

Σε δύο διαστάσεις:

$$\left.\begin{array}{l} d(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 = \boldsymbol{w^T x} + w_3 \\ \\ \quad ό\pi o\upsilon\ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \\ \quad \alpha\nu \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w^T \widetilde{x}}$$



$$(\varepsilon)\text{: } d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{w^T \widetilde{x}} = \boldsymbol{0}$$

Για N χαρακτηριστικά:

$$d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{w^T x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow [\boldsymbol{w_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w_{N+1}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_N} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

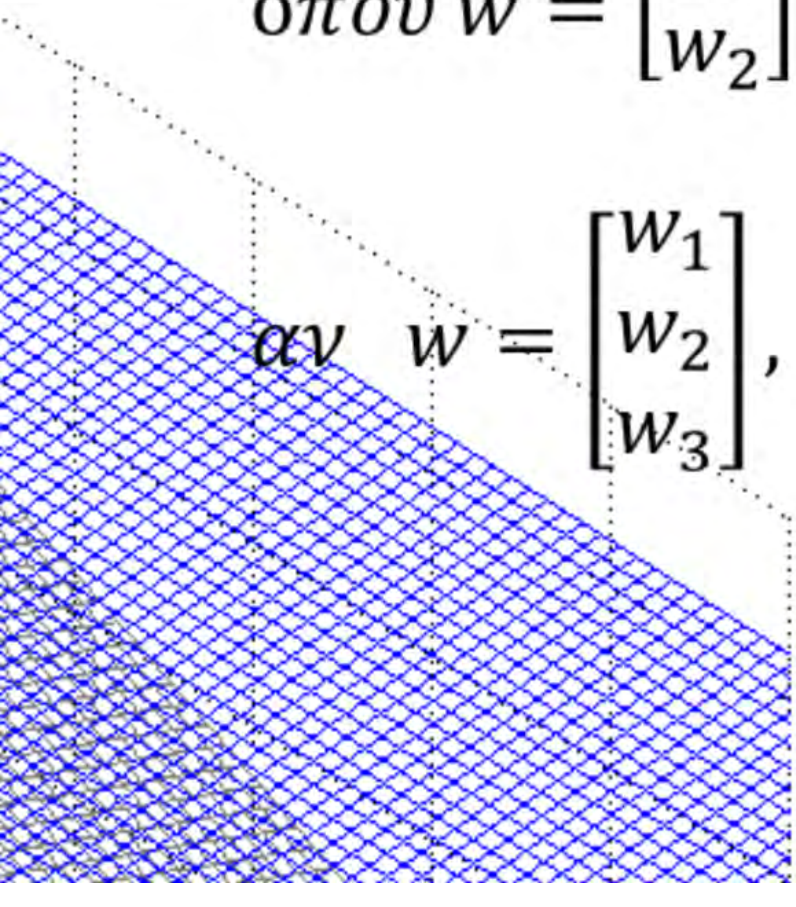
demos:
demo_clustering_hyperplane
demo_augmented_coordinates_random

Ταξινομητές με επόπτ

Αναγνώριση με γραμμικές συναρτήσε

Σε δύο διαστάσεις:

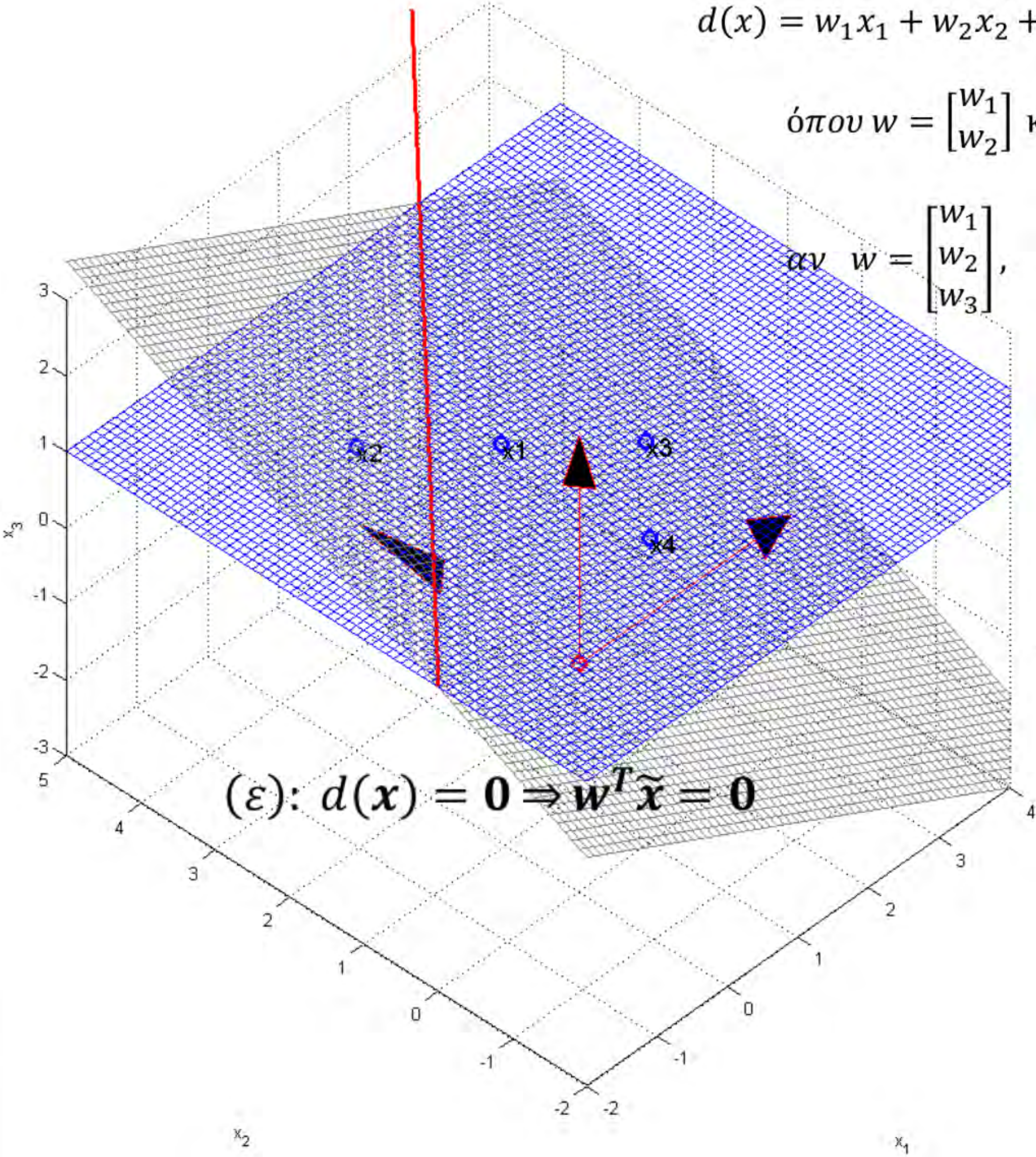
$$\left.\begin{array}{l} d(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 = \ \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} + w_3 \\[2em] \qquad \acute{o}\pi o \upsilon \; w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \; \text{και x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\[2em] \alpha \nu \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \; d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{x}}$$



$$d(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} + w_3$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \; w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\nu \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$(\varepsilon):\; d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{w}^T \widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$$

Για Ν χαρ

$$d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

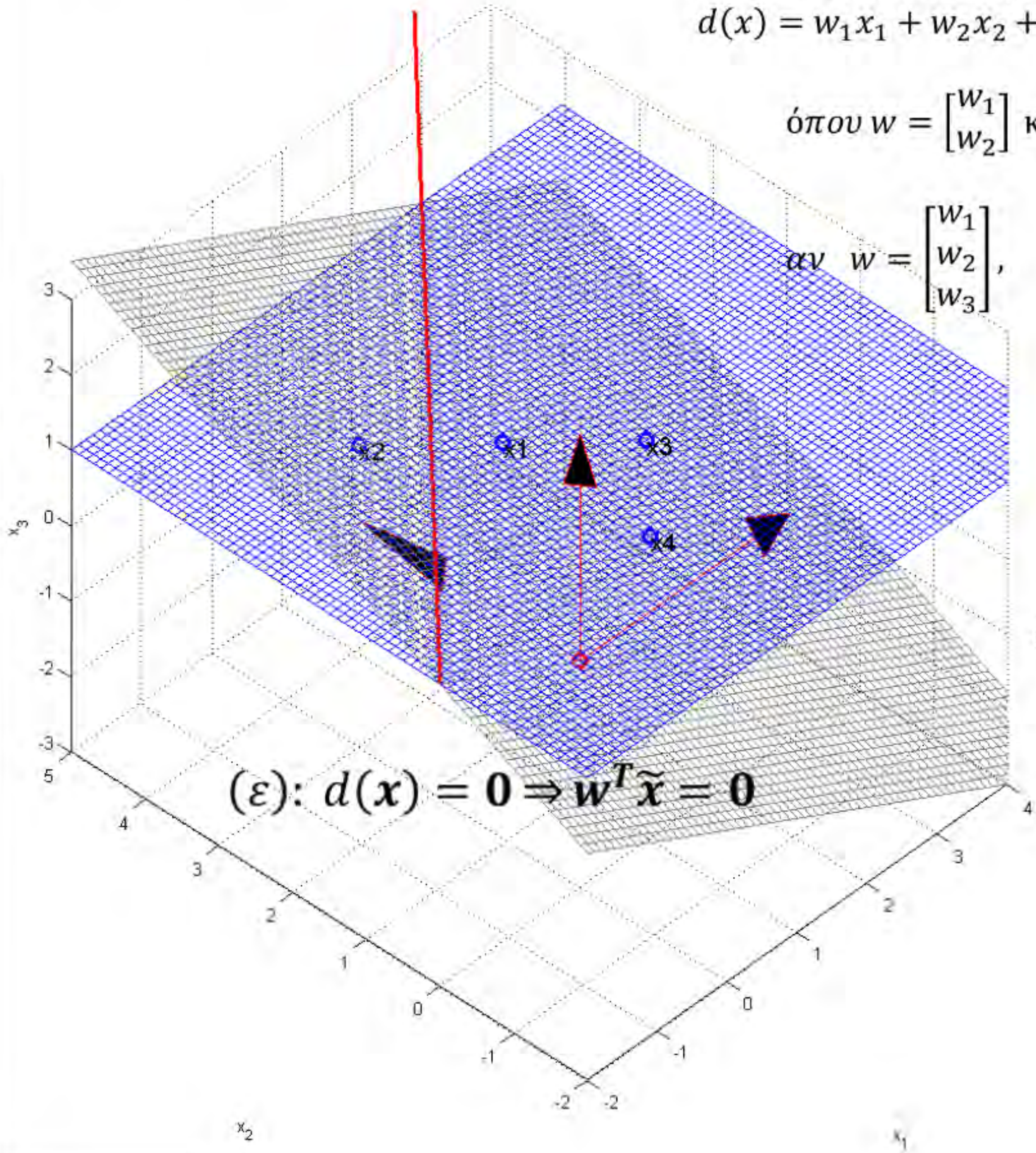
Για Ν χαρακτηριστικά:

$$d(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow [\boldsymbol{w}_{\mathbf{1}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{N}+\mathbf{1}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Επαυξημένα διανύσματα

Σε δύο διαστάσεις:

$$\left.\begin{array}{l} d(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} + w_3 \\[1em] \quad \acute{o}\pi o \upsilon\ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\[1em] \quad \alpha\nu \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}}$$



$$(\varepsilon)\text{: } d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$$

Για N χαρακτηριστικά:

$$d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow [\boldsymbol{w_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w_{N+1}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_N} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

demos:
demo_clustering_hyperplane
demo_augmented_coordinates_random