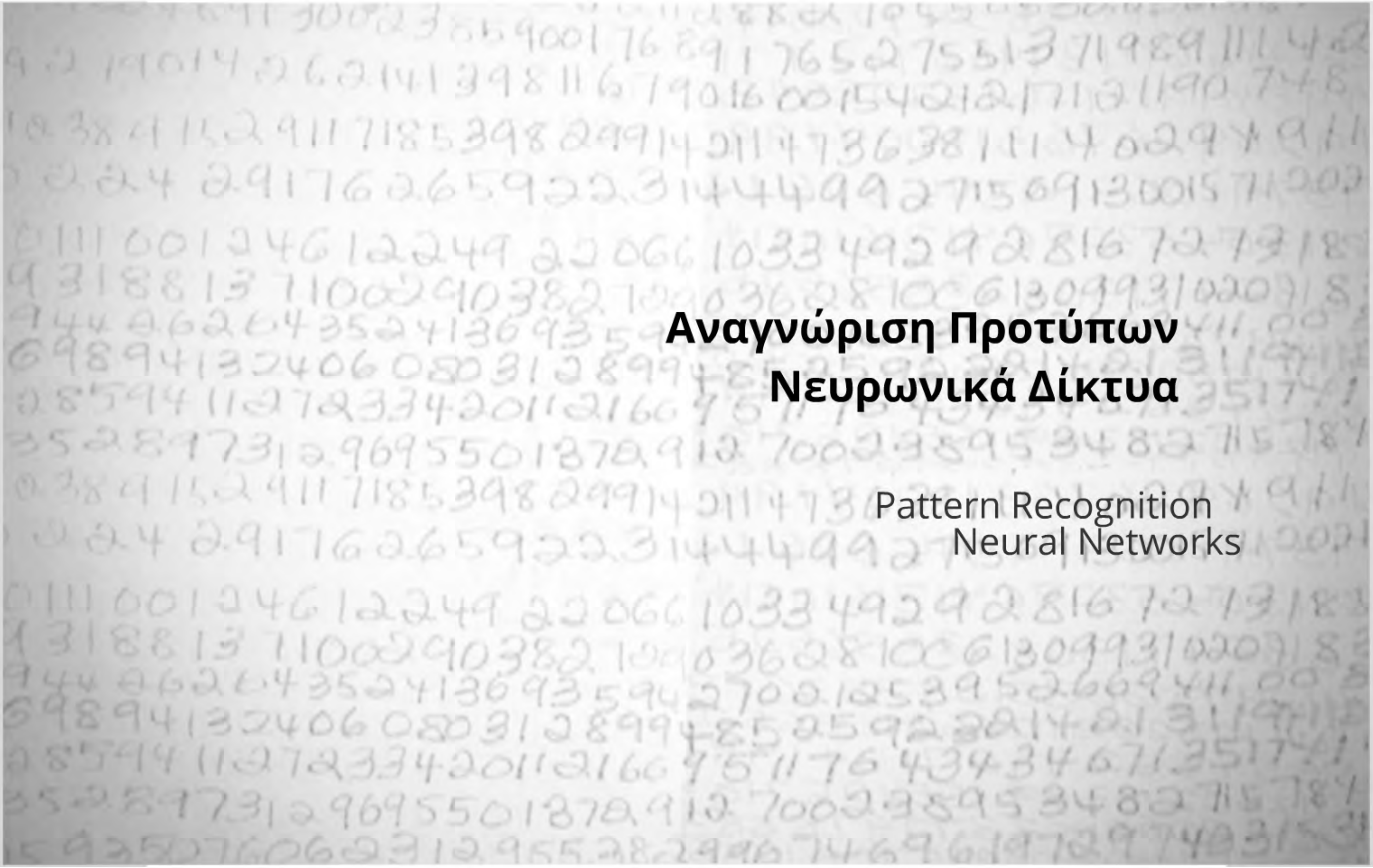
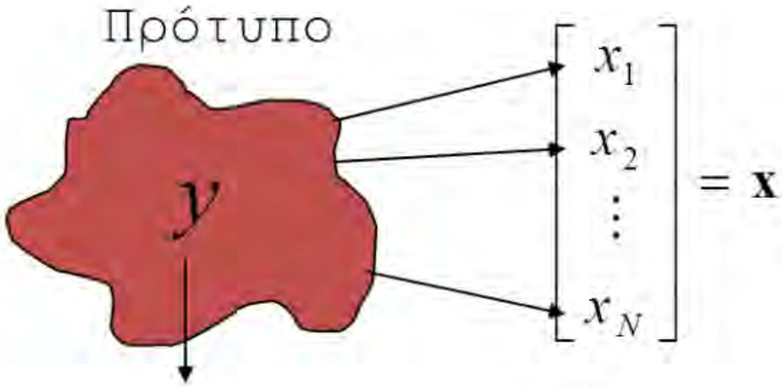


Αναγνώριση Προτύπων
Νευρωνικά Δίκτυα

Pattern Recognition
Neural Networks

βασικές ιδέες.-



Διάνυσμα χαρακτηριστικών
- Διάνυσμα παρατηρήσεων (μετρήσεων) $\mathbf{x} \in X$

«Κρυφή» κατάσταση $y \in Y$
- Δεν είναι δυνατή η άμεση μέτρηση
- Πρότυπα με ίση «κρυφή» κατάσταση ανήκουν στην ίδια κλάση

Στόχος
- Σχεδίαση ενός ταξινομητή $q: X \to Y$ που αποφασίζει
  για την «κρυφή» κατάσταση βάσει μέτρησης/παρατήρησης

διανυσματική περιγραφή.-

- Εφαρμόζεται διανυσματική αναπαράσταση
  - Χαρακτηριστικών για κάθε πρότυπο
  - Για T κλάσεις/τάξεις με K πρότυπα με N χαρακτηριστικά ορίζεται N-διάστατος χώρος
  - Κάθε χαρακτηριστικό συμβολίζεται

$$x_{\nu\kappa}^{\tau}$$

  - διάνυσμα στήλη Nx1 με συμβολισμό $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}_{\kappa} = \begin{vmatrix} x_{1\kappa} \\ x_{2\kappa} \\ \vdots \\ x_{\nu\kappa} \\ \vdots \\ x_{N\kappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1\kappa} & x_{2\kappa} & \dots & x_{\nu\kappa} & \dots & x_{N\kappa} \end{vmatrix}^{T}$$

διανυσματική περιγραφή.-

- Με βάση τον πολλαπλασιασμό πινάκων
  - Ορίζεται η Ευκλείδεια απόσταση δύο προτύπων

$$d_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left[(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]^{1/2}$$

Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων χαρακτηριστικών

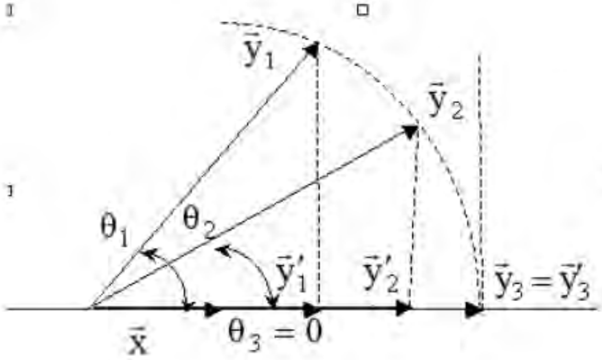
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_\nu \cdot y_\nu + \ldots x_N \cdot y_N = \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu \cdot y_\nu = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vartheta) \quad \text{προβολή} \quad \vec{y} \xrightarrow{\text{στο}} \vec{x}$$

$$!\,\text{αποτέλεσμα} \quad \xrightarrow{\text{εσωτ.γιν.}} \text{βαθμωτό} \quad \text{μέγεθος}$$

Πίνακας γραμμή X πίνακα στήλη

διανυσματική περιγραφή.-



$$\vec{y} = \lambda \cdot \vec{x},\ \mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x} \text{ όπου } \lambda \in R \text{ και } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots \frac{y_\nu}{x_\nu} = \cdots \frac{y_N}{x_N} = \lambda$$

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο ομοιότητας (όχι υποχρεωτικά ισότητας) δύο προτύπων

- Ενώ η ευκλείδεια απόσταση ισότητα
- Το cos(θ) ομοιότητα

βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά.-

- Αναμενόμενη/μέση τιμή $$E[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \approx \mu_x = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} X_i$$
- Διασπορά $$Var(X) = E[(X-\mu_x)^2]$$
- Τυπική απόκλιση $$Std(X) = \sqrt{Var(X)}$$
- Συνδιασπορά $$Cov(X,Y) = E\big[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\big]$$
- Συσχέτιση $$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{Std(X)Std(Y)}$$

συνδιασπορά.-

- Στη θεωρία πιθανοτήτων και στατιστική
  - εκφράζει ένα μέτρο του ποσοστού ταυτόχρονης μεταβολής δύο τυχαίων μεταβλητών
  - πρόσημο συνδιασποράς
    - θετικό - όταν μεταβάλλονται ανάλογα
    - αρνητικό – όταν μεταβάλλονται αντιστρόφως ανάλογα
  - κανονικοποιημένη μορφή συνδιασποράς
    - συντελεστής συσχέτισης (correlation coefficient)
      - εκφράζει τη δύναμη της συσχέτισης

συνδιασπορά.-

- Συνδιασπορά και αναμενόμενες τιμές

$$Cov(X,Y) = E\big[(X-\mu_x)\big(Y-\mu_y\big)\big]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

- Συνδιασπορά και διασπορά

$$Cov(X,X) = E[(X-\mu_x)(X-\mu_x)]$$
$$= E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= Var(X)$$

ανεξαρτησία.-

- Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y καλούνται ανεξάρτητες όταν
  - κάθε γεγονός που ορίζεται από την X είναι ανεξάρτητο από κάθε γεγονός που ορίζεται από την Y
  - σε αυτές τις περιπτώσεις ισχύει:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \Rightarrow$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

  - ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές έχουν μηδενική συνδιασπορά

έλλειψη συσχέτισης.-

- Δύο τυχαίες μεταβλητές καλούνται ασυσχέτιστες (uncorrelated) εάν και μόνο εάν έχουν μηδενική συνδιασπορά
  - ανεξάρτητες ασυσχέτιστες
  - ΠΡΟΣΟΧΗ: δεν ισχύει το αντίστροφο
    - ασυσχέτιστες δεν είναι κατ' ανάγκη ανεξάρτητες

έστω X με κανονική κατανομή στο $[-1,1]$ και $Y = X^2$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= Cov(X,X^2) \\
&= E[X \cdot X^2] - E[X] \cdot E[X^2] \\
&= E[X^3] - E[X] \cdot E[X^2] \\
&= 0 - 0 \cdot E[X^2] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

πίνακας συνδιασποράς.-

- Για τυχαία διανύσματα X και Y (mxn)
  - Πίνακας συνδιασποράς (mxn)

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])^T] \\
&= E[XY^T] - E[X] \cdot E[Y]^T
\end{aligned}
$$

- Για ένα διάνυσμα X, n τυχαίων μεταβλητών
  - Πίνακας συνδιασποράς

$$
\begin{aligned}
Cov(X) &= Cov(X,X) \\
&= E[(X - E[X])(X - E[X])^T] \\
&= \mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mathrm{E}[\mathrm{X}])^2]
\end{aligned}
$$

πίνακας συνδιασποράς.-

- Υπό τη μορφή πινάκων

$$Cov(X) = \begin{bmatrix} Cov(x_1, x_1) & \cdots & Cov(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(x_N, x_1) & \cdots & Cov(x_N, x_N) \end{bmatrix}$$

$$Cov(x_i, x_j) = E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)^T\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K}(x_k - \mu)(x_k - \mu)^T$$

$$Diag\big(Cov(X)\big) = Var(X)$$

αποστάσεις.-

- Για να θεωρηθεί μια σχέση d(x,y) απόσταση στο χώρο των διανυσμάτων θα πρέπει:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$$

$$d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$$

$$d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$$

$$\text{Αν } d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

αποστάσεις.-

- Minkowski τάξης s

$$d_\mu(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N} \left|x_\nu - y_\nu\right|^s\right]^{1/s}$$

- City Block
  - Είναι ειδική περίπτωση της Minkowski με s=1

$$d_c(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{\nu=1}^{N} \left|x_\nu - y_\nu\right|$$

- Ευκλείδεια
  - Είναι ειδική περίπτωση της Minkowski για s=2

$$d_\varepsilon(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N} (x_\nu - y_\nu)^2\right]^{1/2} = [(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{1/2}$$

αποστάσεις.-

- Chebychev

$$d_T(\vec{x}, \vec{y}) = \max\left(\left|x_\nu - y_\nu\right|\right)$$

- Mahalanobis

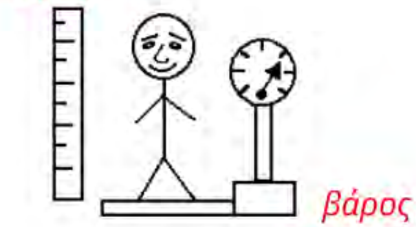
$$d_R(\vec{x}, \vec{y}) = d_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \cdot \mathrm{Cov}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

  - όπου Cov ο πίνακας συνδιασποράς των x και y
- Μη γραμμική (Non Linear)

$$d_{NL}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} O \ \alpha\nu \ d(x, y) \leq T \\ H \end{cases} \alpha\nu \ d(x, y) > T$$

  - όπου H,TR παράμετροι της απόστασης και d(x,y) μια άλλη απόσταση του χώρου

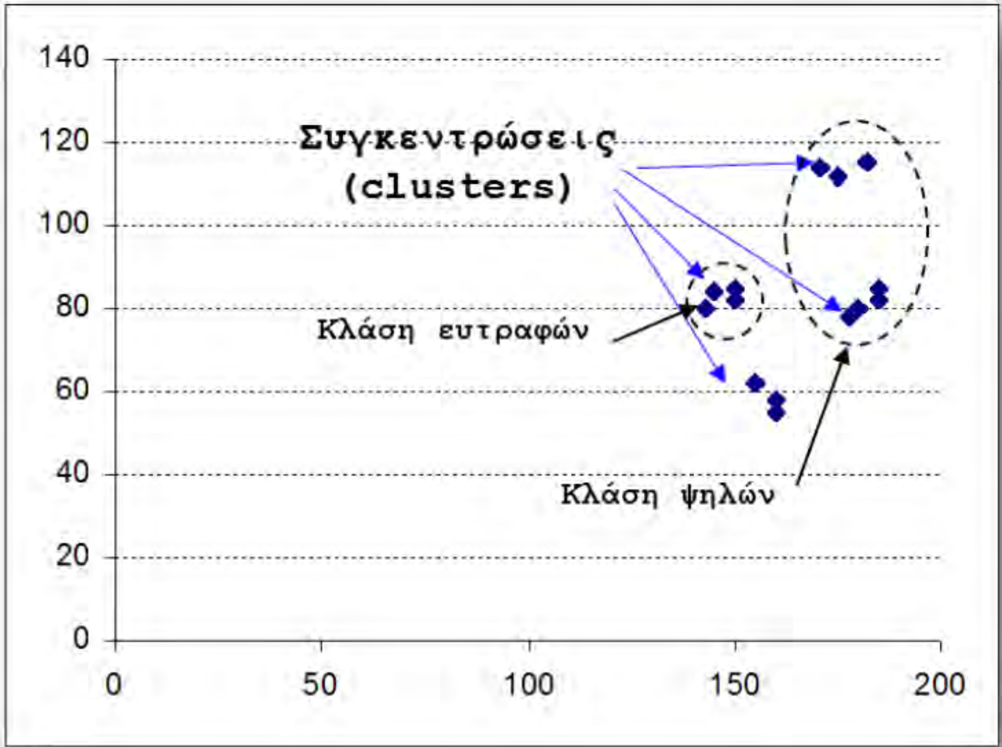
παράδειγμα ύψους-βάρους.-



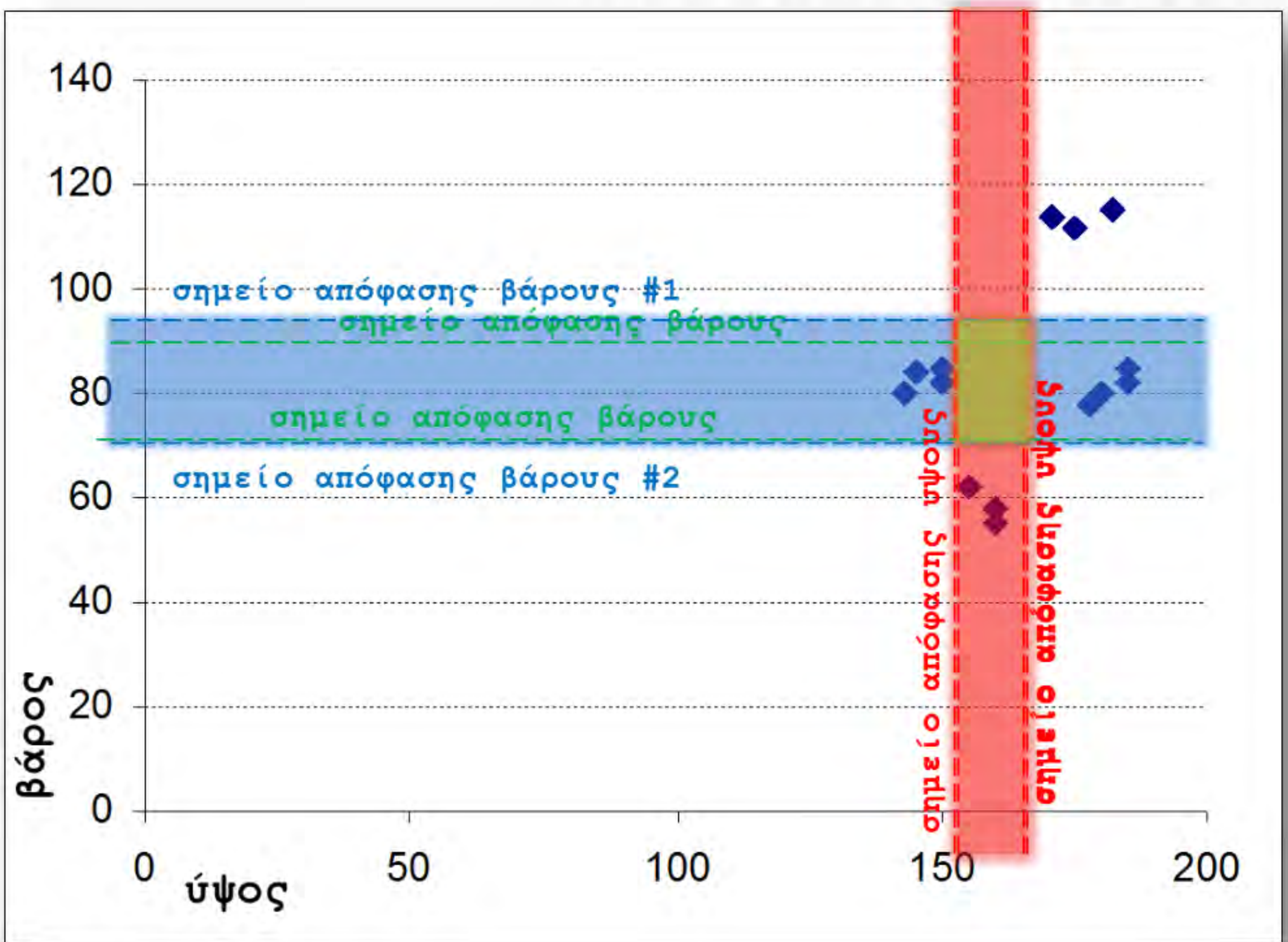
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 185 \\ 85 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 175 \\ 112 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 182 \\ 115 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{14} = \begin{bmatrix} 143 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Π (πρότυπο)	Υ (ύψος σε εκ.)	Β (βάρος σε κιλά)
Π1	185	85
Π2	185	82
Π3	182	115
Π4	180	80
Π5	178	78
Π6	175	112
Π7	171	114
Π8	160	58
Π9	160	55
Π10	155	62
Π11	150	85
Π12	150	82
Π13	145	84
Π14	143	80

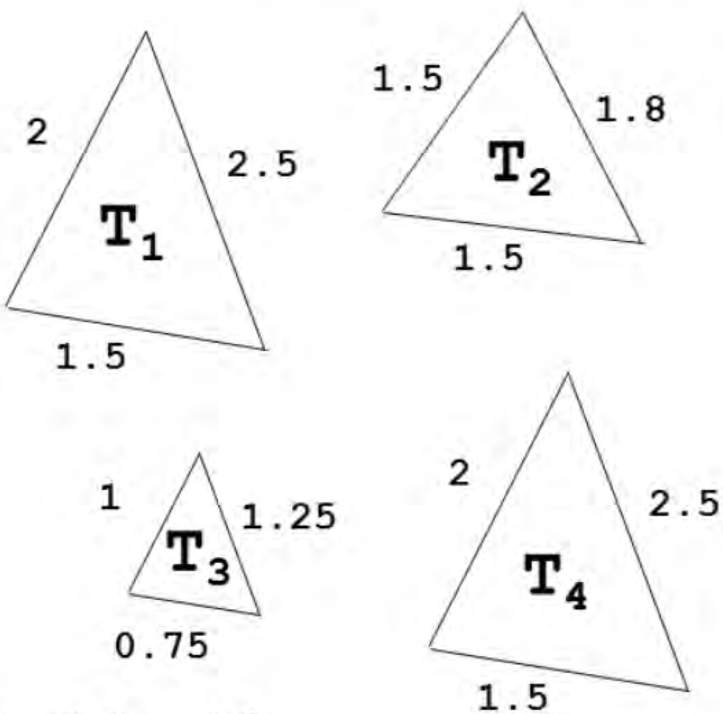


παράδειγμα ύψους-βάρους.-



παράδειγμα τριγώνων-πλευρές.-

- Από τον κόσμο των τριγώνων
    - Μέτρηση πλευρών



$$\frac{2}{1} = \frac{2.5}{1.25} = \frac{1.5}{0.75} = 2$$

Χώρος των χαρακτηριστικών: τα μήκη των πλευρών

T1: (2 , 2.5 , 1.5)
T2: (1.5 , 1.8 , 1.5)
T3: (1 , 1.25 , 0.75)
T4: (2 , 2.5 , 1.5)

$$D_E(T_1, T_2) = \sqrt{(2-1.5)^2 + (2.5-1.8)^2 + (1.5-1.5)^2} = 0.86$$

$$D_E(T_1, T_3) = \sqrt{(2-1)^2 + (2.5-1.25)^2 + (1.5-0.75)^2} = 1.77$$

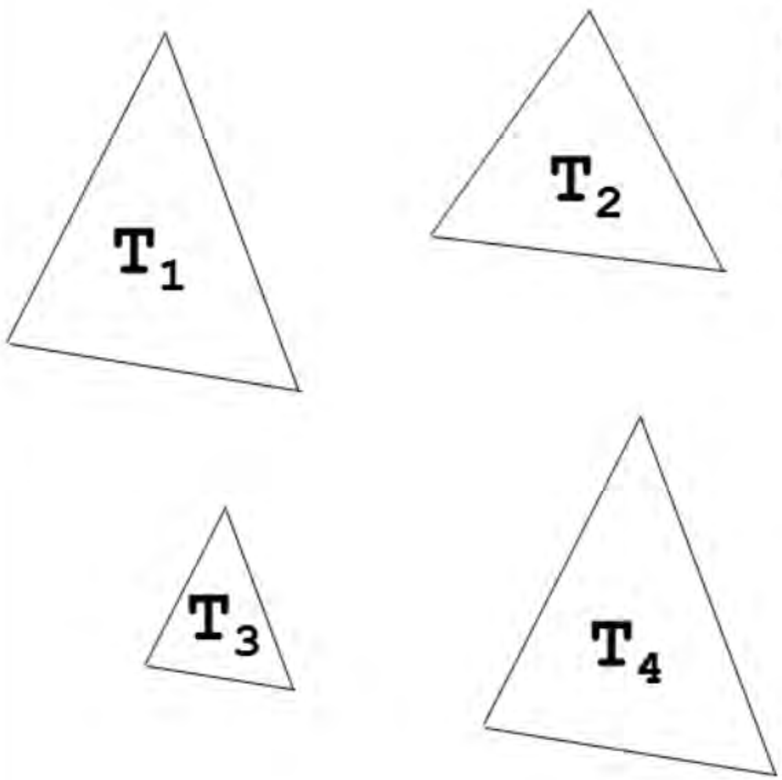
$$D_E(T_1, T_4) = \sqrt{(2-2)^2 + (2.5-2.5)^2 + (1.5-1.5)^2} = 0$$

$$\cos(\theta_{12}) = \frac{2 \cdot 1.5 + 2.5 \cdot 1.8 + 1.5 \cdot 1.5}{\sqrt{2^2 + 2.5^2 + 1.5^2} \cdot \sqrt{1.5^2 + 1.8^2 + 1.5^2}} = 0.99$$

$$\cos(\theta_{13}) = \frac{2 \cdot 1 + 2.5 \cdot 1.25 + 1.5 \cdot 0.75}{\sqrt{2^2 + 2.5^2 + 1.5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1.25^2 + 0.75^2}} = 1$$

παράδειγμα τριγώνων-γωνίες.-

- Από τον κόσμο των τριγώνων
  - Μέτρηση γωνιών



Χώρος των χαρακτηριστικών: γωνίες

T1: (53o 90o 37o) ή (0.93 1.57 0.64)

T2: (53o 74o 53o) ή (0.93 1.29 0.93)

T3: (53o 90o 37o) ή (0.93 1.57 0.64)

T4: (53o 90o 37o) ή (0.93 1.57 0.64)

$$D_E(T_1,T_2) = \sqrt{(0.93-0.93)^2 + (1.57-1.29)^2 + (0.64-0.93)^2} = 0.4013$$

$$D_E(T_1,T_3) = \sqrt{(0.93-0.93)^2 + (1.57-1.57)^2 + (0.64-0.64)^2} = 0$$

$$D_E(T_1,T_4) = \sqrt{(0.93-0.93)^2 + (1.57-1.57)^2 + (0.64-0.64)^2} = 0$$

$$\cos(\theta_{12}) = \frac{0.93\cdot 0.93 + 1.57\cdot 1.29 + 0.64\cdot 0.93}{\sqrt{0.93^2+1.57^2+0.64^2}\cdot\sqrt{0.93^2+1.29^2+0.93^2}} = 0.9787$$

$$\cos(\theta_{13}) = \cos(\theta_{14}) = \frac{0.93\cdot 0.93 + 1.57\cdot 1.57 + 0.64\cdot 0.64}{\sqrt{0.93^2+1.57^2+0.64^2}\cdot\sqrt{0.93^2+1.57^2+0.64^2}} = 1$$

παραδείγματα.-

- Παραδείγματα με το matlab
  - Χαρακτηριστικά δύο διαστάσεων
    - Harris image features
    - Iris recognition
  - Χαρακτηριστικά τριών διαστάσεων
    - Τρίγωνα
  - Χαρακτηριστικά πολλών διαστάσεων
    - Fingerprint recognition